

Copyright © 2005 Dunod. Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite à l'exception des cas prévus aux termes de l'article L.122-5, 2° et 3° a) du Code de la Propriété Intellectuelle.

Pierre Mayé

# MOTEURS ÉLECTRIQUES INDUSTRIELS

DUNOD

# Consultez nos catalogues sur le Web

The screenshot shows the Dunod website interface. At the top left is the Dunod logo and the text 'Éditions ETSF InterÉditions Microsoft Press'. A search bar is located at the top center with the text 'Recherche' and a dropdown menu set to '--- Par Titre ---'. To the right of the search bar are links for 'Collections' and 'Index thématique'. Below the search bar is a horizontal navigation menu with categories: 'Accueil', 'Contacts', 'Sciences et Techniques', 'Informatique', 'Gestion et Management', 'Sciences Humaines', 'Acheter', and 'Mon panier'. The main content area is divided into several sections: 'Interviews' with two featured articles, 'Événements' with a notice about Saint-Valentin, 'En librairie ce mois-ci' with a 'Spécial Révisions scientifiques' promotion, and a central 'Nouveautés' section featuring book covers for 'Image numérique couleur', 'Risque Pays 2004', 'LES IDS', and 'De quelle vie voulez-vous être le héros?'. On the right side, there are sections for 'LES BIBLIOTHÈQUES DES MÉTIERS' and 'LES NEWSLETTERS'. At the bottom of the page, there are links for 'bibliothèques des métiers', 'newsletters', 'ediscience.net', and 'expert-sup.com', along with a 'Notice légale' link.

[www.dunod.com](http://www.dunod.com)

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1<sup>er</sup> juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).

**DANGER**  
LE PHOTOCOPIAGE  
TUE LE LIVRE

© Dunod, Paris, 2005  
ISBN 2 10 048729 9

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

# TABLE DES MATIÈRES

---

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 • Généralités</b>	<b>3</b>
1.1 Introduction	3
1.2 Historique	4
1.3 Constitution	6
1.4 Comportement mécanique du moteur	7
1.5 Méthodes d'étude et de modélisation des moteurs	14
<b>2 • Lois physiques régissant le fonctionnement des moteurs</b>	<b>19</b>
2.1 Équations de Maxwell	19
2.2 Effet de peau	25
2.3 Logiciels de calcul des champs	40
<b>3 • Tension magnétique d'entrefer d'un moteur alternatif</b>	<b>43</b>
3.1 Enroulements triphasés	43
3.2 Création de la tension magnétique d'entrefer	50
3.3 Tension magnétique tournante	69
<b>4 • Conversion électromécanique</b>	<b>89</b>
4.1 Étude générale	89
4.2 Origine du couple électromagnétique dans les moteurs	94
<b>5 • Pertes et échauffements</b>	<b>105</b>
5.1 Pertes et rendement	105
5.2 Échauffement	125
<b>6 • Transformations utilisées dans l'étude des moteurs alternatifs</b>	<b>139</b>
6.1 Transformation triphasé-diphasé	139
6.2 Transformation de Park	144
6.3 Vecteurs d'espace	151

<b>7 • Principe et modélisation du moteur asynchrone</b>	<b>161</b>
7.1 Généralités	161
7.2 Principe	164
7.3 Modélisation	165
7.4 Application de la transformation de Park	169
7.5 Vecteurs d'espace	181
<b>8 • Moteur asynchrone en régime permanent</b>	<b>191</b>
8.1 Simplification des équations	191
8.2 Modèles équivalents	193
8.3 Puissances et rendement	202
8.4 Couple électromagnétique	204
8.5 Influence des harmoniques	213
8.6 Cage d'écureuil	219
<b>9 • Mise en œuvre des moteurs asynchrones</b>	<b>227</b>
9.1 Moteur asynchrone à cage alimenté à fréquence fixe	227
9.2 Moteur asynchrone à rotor bobiné	245
9.3 Moteur asynchrone à cage alimenté à fréquence variable	251
<b>10 • Principe et modélisation du moteur synchrone</b>	<b>263</b>
10.1 Généralités	263
10.2 Principe	269
10.3 Modélisation	270
10.4 Application de la transformation de Park	280
10.5 Ondulation du couple	289
<b>11 • Moteur synchrone en régime permanent</b>	<b>293</b>
11.1 Simplification des équations	293
11.2 Diagrammes vectoriels	298
11.3 Puissances et rendement	300
11.4 Couple	301
<b>12 • Mise en œuvre des moteurs synchrones</b>	<b>311</b>
12.1 Moteur synchrone alimenté à fréquence fixe	311
12.2 Moteur synchrone alimenté à fréquence variable	318

<b>13 • Moteur à réluctance variable</b>	<b>327</b>
13.1 Généralités	327
13.2 Principe	329
13.3 Modélisation	332
13.4 Alimentation électronique	338
<b>14 • Moteur à courant continu</b>	<b>345</b>
14.1 Généralités	345
14.2 Principe	349
14.3 Modélisation	358
14.4 Étude énergétique	362
14.5 Caractéristiques suivant le mode d'excitation	363
14.6 Alimentation par convertisseur électronique	370
<b>Biographies</b>	<b>375</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>381</b>
<b>Index</b>	<b>383</b>

Copyright © 2005 Dunod. Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite à l'exception des cas prévus aux termes de l'article L.122-5, 2° et 3° a) du Code de la Propriété Intellectuelle.

# INTRODUCTION

---

Les moteurs électriques sont aujourd'hui présents dans toutes les branches de l'industrie. Ils constituent la force motrice principale de nombreux processus. Le domaine des transports fait aussi largement appel aux moteurs électriques. La traction ferroviaire est depuis longtemps acquise à cette technique. Les machines électriques prennent une place croissante en propulsion navale. Seuls les véhicules routiers résistent encore à la progression de l'électrique, malgré de nombreuses recherches et quelques réalisations.

Cet ouvrage s'intéresse aux moteurs électriques utilisés dans l'industrie et les transports. Nous n'avons pas traité ici des machines employées dans les applications domestiques et des petits actionneurs électriques de la robotique, les dispositifs de faible puissance employés dans ces domaines étant plus particuliers.

L'ouvrage est principalement consacré aux moteurs alternatifs qui occupent aujourd'hui la plus grande partie du marché. La notion de champ tournant est développée car elle est à la base de toutes les réalisations. Les principes généraux de la conversion électromécanique permettent de comprendre le fonctionnement des moteurs utilisés. Nous approfondissons ensuite le cas du moteur asynchrone qui occupe la plus grande place dans les applications. La machine synchrone est également étudiée en détail, en distinguant les machines à rotor bobiné utilisées en forte puissance et les machines à aimants permanents rencontrées aux puissances faibles ou moyennes. La modélisation de ces moteurs fait largement appel à la transformation de Park et aux vecteurs d'espace, outils indispensables à la commande. Le fonctionnement en régime permanent est déduit de cette étude générale. Nous nous intéressons ensuite à la mise en œuvre de ces machines.

Deux autres types de moteurs sont étudiés plus succinctement. Le moteur à réluctance variable, solution intéressante pour certaines applications, a sans doute un avenir prometteur. Le moteur à courant continu, grand classique de la vitesse variable, est, lui, en voie d'extinction progressive, mais il est encore très présent dans les installations actuelles.

La bibliographie comporte les traités classiques d'électrotechnique qui présentent les machines électriques sous un aspect plus traditionnel, mais qui restent intéressants pour de nombreuses notions, ainsi que des livres plus récents qui développent la commande électronique des moteurs que nous ne faisons qu'évoquer dans cet ouvrage. Enfin, de courtes notices biographiques tentent de faire connaître un peu mieux quelques scientifiques ou ingénieurs qui ont laissé leur nom à une théorie ou à une réalisation dans le domaine des moteurs électriques.

Copyright © 2005 Dunod. Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite à l'exception des cas prévus aux termes de l'article L.122-5, 2° et 3° a) du Code de la Propriété Intellectuelle.

## 1.1 Introduction

### 1.1.1 Définition

Un moteur électrique est une machine qui transforme de l'énergie électrique en énergie mécanique.

### 1.1.2 Utilisation

Les moteurs électriques sont aujourd'hui présents dans toutes les branches de l'industrie et des transports. Ils consomment environ la moitié de l'énergie électrique générée dans le monde. Beaucoup de moteurs sont branchés directement sur le réseau, mais de plus en plus, ils sont associés à des convertisseurs électroniques permettant une variation de leur vitesse.

### 1.1.3 Intérêt

Les moteurs électriques effectuent une conversion d'énergie avec de faibles pertes : le rendement des grosses unités atteint 99 %. Le réseau électrique est partout disponible dans les pays développés et l'énergie électrique est ainsi facilement distribuée. Le réglage est commode grâce à l'électronique de puissance. Enfin, les moteurs électriques ne sont pas polluants, ce qui ne doit toutefois pas faire oublier qu'il n'en est pas toujours de même pour la production d'électricité.

### 1.1.4 Classification

La puissance des moteurs électriques peut aller de quelques fractions de watts à quelques centaines de mégawatts. Les très petites puissances correspondent à des machines où la transmission d'information prime sur la conversion d'énergie. Les petites puissances se rencontrent principalement dans les applications domestiques. Ces deux domaines, qui utilisent des technologies particulières, ne sont pas abordés dans cet ouvrage qui se consacre aux moteurs industriels dont la puissance est au moins de l'ordre du kilowatt. Nous y avons également inclus les moteurs utilisés dans les transports qui font appel aux mêmes technologies.

Les machines électriques industrielles classiques sont :

- le moteur asynchrone ;
- le moteur synchrone ;

– le moteur à courant continu.

Le moteur à réluctance, d'apparition plus récente, occupe un créneau particulier des applications.

## 1.2 Historique

### 1.2.1 Bases de l'électromagnétisme

Les grandes découvertes dans le domaine de l'électromagnétisme se sont échelonnées dans la première moitié du XIX<sup>e</sup> siècle. C'est cette branche de la physique qui est à la base de l'électrotechnique et en particulier de l'avènement des moteurs électriques. Le physicien danois Hans Christian Oersted découvre en 1819 l'effet magnétique du courant électrique. Il observe qu'une aiguille aimantée placée à proximité d'un conducteur dévie quand on branche celui-ci sur une pile. Le physicien britannique Michael Faraday établit les lois qui régissent les phénomènes d'induction en 1831. Les bases d'électromagnétisme nécessaires à l'étude des moteurs électriques sont dès lors connues.

Le physicien écossais James Clerk Maxwell formalise les lois de l'électromagnétisme. Il commence par mathématiser les résultats obtenus plus tôt par Faraday. En 1864, il publie les travaux qui contiennent les équations qui portent aujourd'hui son nom. La parution en 1873 de son ouvrage *Treatise on Electricity and Magnetism* permet de répandre ses méthodes alors novatrices.

### 1.2.2 Premières réalisations

Les historiens des sciences et techniques ont quelques incertitudes sur les premières réalisations et la paternité des inventions des machines électriques. Nous essaierons néanmoins de citer quelques noms et quelques dates de cette aventure industrielle. Michael Faraday réalise un premier moteur électromagnétique en 1821. Il est suivi de peu par Peter Barlow qui invente en 1822 un dispositif qui porte aujourd'hui son nom, la roue de Barlow. Le physicien et chimiste Moritz Hermann von Jacobi réalise un moteur à inducteur bobiné à commutateur mécanique en 1834. Il fait circuler un canot à hélice équipé de son moteur sur la Neva à Saint-Pétersbourg. L'industriel allemand Werner von Siemens construit vers 1856 une magnéto. L'Italien Antonio Pacinotti introduit en 1859 une machine munie d'un rotor en forme d'anneau. Cinq ans plus tard, il publie la description d'une machine pouvant être utilisée en moteur ou en générateur. Ses travaux passent alors inaperçus. L'inventeur belge, installé en France, Zénobe Gramme construit en 1868 sa célèbre dynamo et fonde en 1871 la Société des machines magnéto-électriques Gramme. La réversibilité de la dynamo est découverte en 1873. En 1872, Werner von Siemens prend un brevet pour son induit en tambour. Nikola Tesla, alors étudiant, propose déjà d'utiliser une machine sans commutateur. Devenu employé de la *Continental Edison Company* en France, il construit le premier moteur asynchrone en 1883 alors qu'il séjourne à Strasbourg et dépose un brevet en 1884. Les moteurs classiques utilisés aujourd'hui sont donc déjà tous connus en cette fin de XIX<sup>e</sup> siècle. À la même époque, l'Italien Galileo Ferraris établit la théorie du champ tournant.

### 1.2.3 Apparition et développement de l'électronique de puissance

Paradoxalement, ce ne sont pas les progrès dans la technique des moteurs électriques qui ont donné une nouvelle accélération à leur développement, mais les découvertes dans le domaine des composants électroniques de puissance. Jusque dans les années 1960, les possibilités de variation de vitesse des moteurs électriques étaient assez limitées. L'association de plusieurs machines en groupes tournants était une solution lourde à mettre en œuvre. L'apparition du thyristor puis le développement de ses applications allaient apporter de nouvelles possibilités jusqu'alors insoupçonnées. Les hacheurs à thyristors apparaissent à la fin des années 1960 et commencent à être appliqués à des domaines tels que la traction ferroviaire.

### 1.2.4 Évolution récente

Les moteurs sont de plus en plus souvent associés à des convertisseurs électroniques de puissance. Leurs caractéristiques doivent donc être adaptées à cet usage. Les évolutions concernent à la fois les machines elles-mêmes, l'électronique de puissance qui les alimente, mais encore plus l'électronique numérique qui réalise les commandes. Du côté des moteurs, les progrès récents sont dus :

- à l'amélioration de la qualité des matériaux ;
- à l'apparition d'aimants performants ;
- à une meilleure maîtrise du refroidissement ;
- à une optimisation des caractéristiques par l'emploi de logiciels de plus en plus sophistiqués.

Dans les trois dernières décennies du XX<sup>e</sup> siècle, l'électronique de puissance continue de se perfectionner avec l'apparition et le développement de nouveaux composants : thyristors blocables par la gâchette (GTO), IGBT. Cela permet son utilisation dans tous les domaines d'application des moteurs électriques. Pour la commande, c'est l'apparition de processeurs rapides (DSP : *Digital signal processor*) qui permet enfin de développer l'usage des moteurs alternatifs à vitesse variable. Les moteurs utilisés sont toujours ceux des débuts, mais avec une importance relative qui a beaucoup évolué, la machine à courant continu étant en voie d'extinction, alors que la machine asynchrone ne cesse d'accroître sa prépondérance, concurrencée uniquement dans quelques domaines par le moteur synchrone et le moteur à réluctance variable.

### 1.2.5 Exemple d'évolution : la traction ferroviaire

Pendant longtemps, la solution classique en France pour l'équipement des locomotives électriques a été le moteur à courant continu à excitation série. Ses caractéristiques sont en effet parfaitement adaptées aux contraintes imposées dans le domaine de la traction ferroviaire. Le TGV sud-est a encore été équipé de moteurs à courant continu alimentés par des hacheurs. Devant les limitations inhérentes à l'emploi de machines à collecteur, les ingénieurs ont cherché à les remplacer par des moteurs à courants alternatifs. C'est d'abord la machine synchrone autopilotée alimentée par un onduleur de courant à thyristors qui a amené une première amélioration des performances. Le TGV atlantique et les locomotives Sybic ont été ainsi

équipés. Cet emploi des moteurs synchrones n'a été que de courte durée, les progrès réalisés dans la technologie des composants de l'électronique de puissance ont conduit à l'étape suivante qui a été l'apparition du moteur asynchrone alimenté par des onduleurs de tension à GTO. Le TGV transmanche et les locomotives Astride utilisent cette solution. Dans cette évolution, les moteurs ont surtout gagné en puissance massique.

### 1.2.6 Une utilisation récente : la propulsion navale

Le moteur électrique conquiert des domaines d'application où il était traditionnellement absent ou peu répandu : il faut ainsi citer la propulsion de bateaux de toutes tailles et, en particulier celle des grands navires. La propulsion navale a été pendant longtemps l'apanage du moteur diesel, mais les constructeurs font appel de plus en plus à des moteurs électriques alimentés par des alternateurs eux-mêmes entraînés par un moteur diesel. Cette solution, qui semble compliquer les choses inutilement, apporte une souplesse de fonctionnement impossible à obtenir avec un moteur diesel entraînant directement l'arbre d'hélice. Le couple de démarrage est plus élevé et les manœuvres à faible vitesse sont facilitées.

Notons que les sous-marins militaires utilisent fréquemment la propulsion électrique depuis longtemps, mais pour une raison bien particulière : la discrétion acoustique nécessaire à leur tâche. Un premier sous-marin équipé d'un moteur électrique alimenté par des batteries est construit en 1860. Dès le début du XX<sup>e</sup> siècle, plusieurs gros sous-marins emploient la propulsion électrique. À partir des années 1920, cette solution est retenue pour plusieurs bâtiments militaires de surface. Quelques réalisations concernent des bateaux civils, mais sans l'électronique de puissance, le moteur électrique ne présente pas suffisamment d'avantages. La solution est toutefois adaptée à des cas particuliers comme les navires brise-glace qui ont besoin d'un couple élevé à faible vitesse.

Depuis les années 1990, les bateaux de croisière utilisent également la propulsion électrique. Cette solution a l'avantage d'employer les mêmes alternateurs pour les moteurs et pour le réseau de bord, ce qui optimise le coût de l'installation. La dissociation des moteurs diesel et des arbres d'hélices laisse une plus grande liberté d'aménagement du bateau. Enfin, la réduction des vibrations transmises à la structure participe au confort des passagers. La propulsion navale fait habituellement usage de moteurs synchrones à pôles saillants alimentés par des convertisseurs de fréquence à thyristors. Par exemple, l'équipement du navire « Star Princess » est de deux moteurs synchrones de 12 MW, un par hélice.

## 1.3 Constitution

### 1.3.1 Stator et rotor

Sur le plan mécanique, un moteur est constitué d'une partie fixe, le stator et d'une partie mobile, le rotor, entre lesquelles se trouve un petit intervalle d'air, l'entrefer (*figure 1.1*). Dans pratiquement tous les moteurs, le rotor est à l'intérieur du stator, bien que la configuration inverse existe pour des applications particulières.

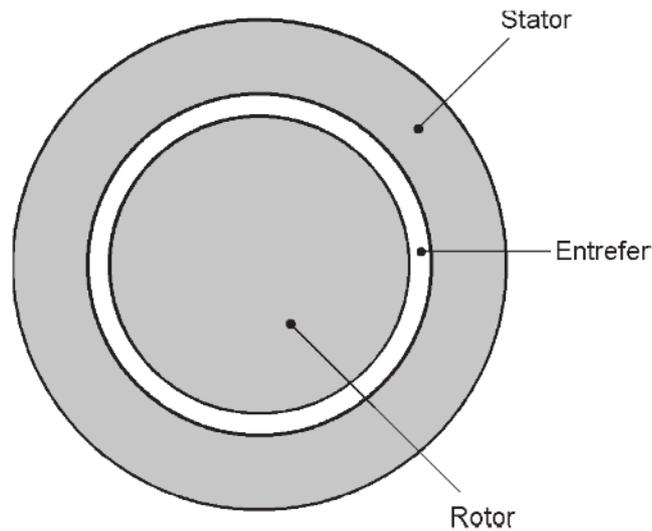


Figure 1.1 – Coupe de la structure simplifiée d'un moteur classique.

### 1.3.2 Circuit magnétique

Sur le plan électromagnétique, un moteur comporte un circuit magnétique, constitué d'un matériau ferromagnétique à forte perméabilité, d'enroulements et éventuellement d'aimants permanents. Le matériau ferromagnétique est nécessaire pour que le flux produit soit assez élevé et pour qu'il soit canalisé afin de pouvoir utiliser correctement ses effets. Les parties ferromagnétiques soumises à un flux constant ou lentement variable peuvent être massives, alors que les parties soumises à un flux à variation rapide sont obligatoirement feuilletées pour limiter les pertes par courants de Foucault.

### 1.3.3 Enroulements

Suivant le type de moteur, des enroulements peuvent être placés sur le stator, sur le rotor ou sur les deux parties à la fois. On rencontre deux types d'enroulements :

- les enroulements concentrés formés de bobines placées sur des pôles saillants (*figure 1.2*) ;
- les enroulements distribués constitués de conducteurs placés dans des encoches du circuit magnétiques et assemblés ensuite par des connexions frontales (*figure 1.3*).

## 1.4 Comportement mécanique du moteur

### 1.4.1 Principe fondamental de la dynamique

Le rotor et la charge entraînée forment un système de moment d'inertie  $J$  tournant à la vitesse de rotation  $\omega$  autour d'un axe et soumis à un couple moteur de moment  $\gamma$  et à des couples résistants de moment résultant  $\gamma_r$ .

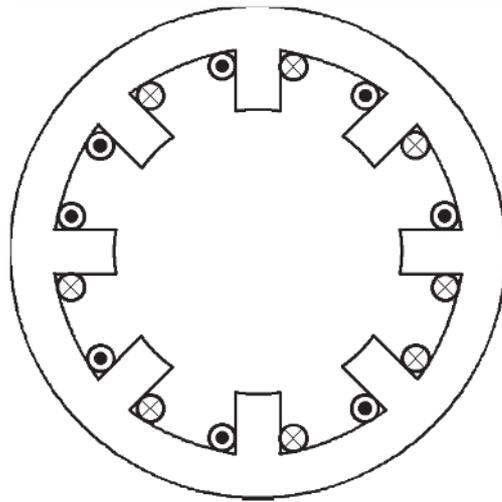


Figure 1.2 – Coupe d'un stator à pôles saillants et enroulement concentré.

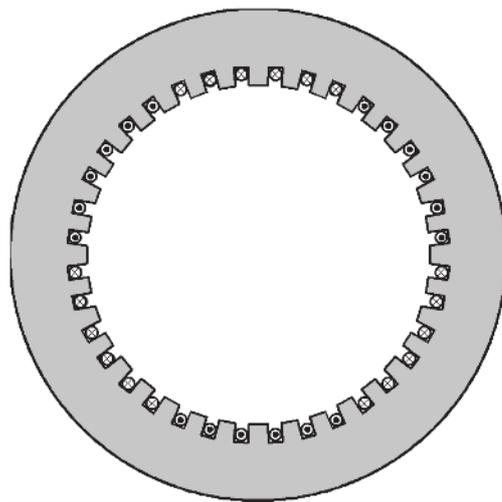


Figure 1.3 – Coupe d'un stator à encoches et enroulement distribué.

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à ce système s'écrit :

$$J \frac{d\omega}{dt} = \gamma - \gamma_r$$

Le couple moteur est dû à la conversion électromécanique réalisée par la machine. Le couple résistant résulte d'une cause interne (frottements) et d'une cause externe (charge entraînée).

En régime permanent, la vitesse est constante et la relation précédente traduit alors l'égalité du couple moteur et du couple résistant :

$$\gamma = \gamma_r$$

Il est alors souvent commode de retrancher le moment du couple correspondant aux pertes internes afin de faire apparaître le moment  $\gamma_u$  du couple utile du moteur et le moment  $\gamma_c$  du couple résistant de la charge :

$$\gamma_u = \gamma_c$$

### 1.4.2 Moment d'inertie

Le moment d'inertie du rotor chiffre la façon dont le moteur s'oppose aux variations de vitesse. Plus le moment d'inertie est grand, plus il faut un couple élevé pour obtenir une accélération donnée. Comme le couple est une grandeur importante pour le dimensionnement du moteur, on a tout intérêt à avoir un faible moment d'inertie. Ce dernier dépend à la fois de la masse des parties mobiles et de la façon dont elles sont placées par rapport à l'axe de rotation. En effet, le moment d'inertie d'un solide (V) par rapport à un axe ( $\Delta$ ) est défini par :

$$J = \iiint_{(V)} r^2 \rho \, dv$$

$r$  est la distance d'un point M du solide à l'axe,  $\rho$  est la masse volumique en ce point, et  $dv$  est l'élément de volume. L'intégrale triple est étendue à tous les points du solide. On peut donner une expression simple de  $J$  dans des cas particuliers. Par exemple, considérons un cylindre plein et homogène (figure 1.4) de masse  $m$ , de rayon  $R$  et de longueur  $l$ . La masse volumique est :

$$\rho = \frac{m}{\pi R^2 l}$$

Le moment d'inertie par rapport à l'axe du cylindre se calcule en considérant des nappes cylindriques de rayon  $r$  et d'épaisseur  $dr$  :

$$J = \int_0^R r^2 \rho 2\pi r l \, dr$$

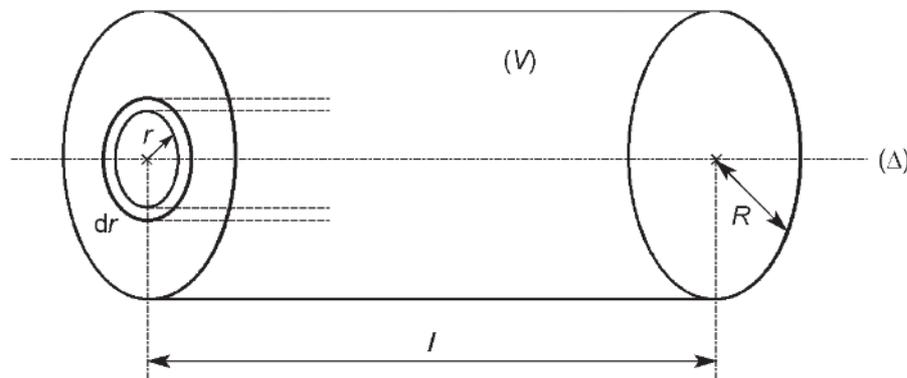


Figure 1.4 – Découpage d'un cylindre en nappes cylindriques pour le calcul de son moment d'inertie.

soit :

$$J = \pi \rho l \frac{R^4}{2}$$

En introduisant la masse, on arrive à :

$$J = \frac{1}{2} m R^2$$

On constate que le moment d'inertie est d'autant plus grand que la masse est importante et que le rayon du cylindre est élevé. On retrouve un résultat analogue dans tous les cas.

### 1.4.3 Régime permanent

#### ■ Caractéristiques mécaniques

La caractéristique mécanique d'un moteur est la courbe qui donne le moment  $\gamma_u$  du couple utile en fonction de la vitesse de rotation  $\omega$  ou de la fréquence de rotation  $n$ . La caractéristique d'un récepteur mécanique (charge) est la courbe qui donne le moment  $\gamma_c$  du couple résistant en fonction de la vitesse de rotation  $\omega$  ou de la fréquence de rotation  $n$ .

Dans une première approche, le couple résistant interne du moteur est négligé et le couple utile s'identifie alors au couple moteur tandis que le couple résistant de la charge s'identifie au couple résistant total.

#### ■ Point de fonctionnement

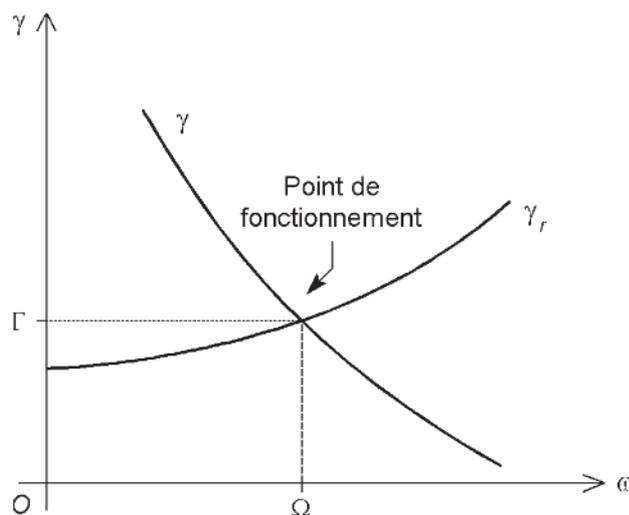


Figure 1.5 – Point de fonctionnement d'un moteur accouplé à un récepteur.

Quand le moteur est accouplé au récepteur, le point de fonctionnement se situe à l'intersection de la caractéristique mécanique du moteur et de la caractéristique du récepteur (*figure 1.5*) :

$$\gamma = \gamma_r$$

L'allure de la caractéristique du récepteur est très variable.

### ■ Stabilité du fonctionnement

Le fonctionnement d'un moteur en régime permanent est stable si l'action du couple moteur tend à corriger l'effet d'une perturbation qui modifie la vitesse de rotation. Si la machine ralentit, le moment du couple moteur doit devenir supérieur au moment du couple résistant, tandis que si la machine accélère, le moment du couple moteur doit devenir inférieur au moment du couple résistant. Il faut donc que :

$$\frac{d(\gamma - \gamma_r)}{d\omega} < 0$$

soit :

$$\frac{d\gamma}{d\omega} < \frac{d\gamma_r}{d\omega}$$

Graphiquement, le fonctionnement est stable si, au point de fonctionnement, la tangente à la caractéristique mécanique est au-dessous de la tangente à la caractéristique du récepteur (*figure 1.6*) et instable dans le cas contraire (*figure 1.7*).

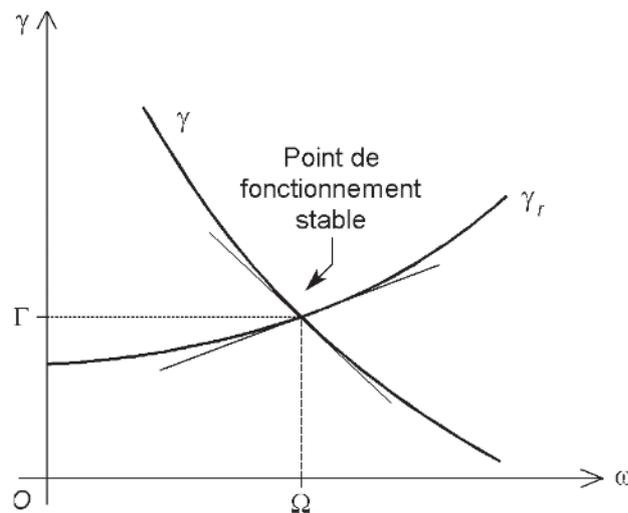


Figure 1.6 – Fonctionnement stable.

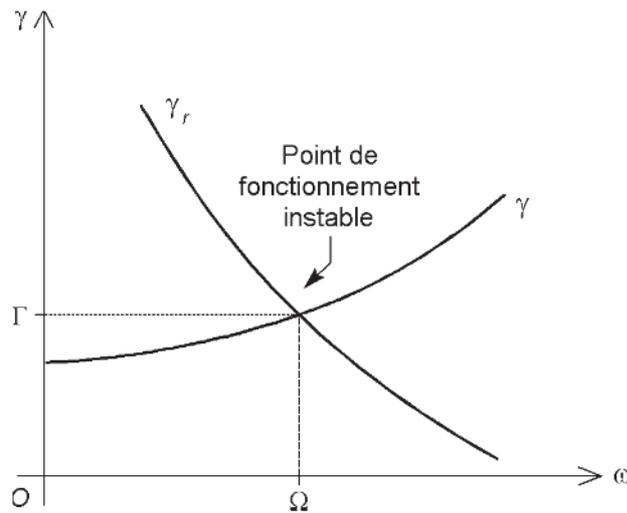


Figure 1.7 – Fonctionnement instable.

#### 1.4.4 Démarrage

##### ■ Condition de démarrage

Pour qu'un moteur puisse démarrer, il faut que le moment  $\gamma_d$  de son couple moteur quand la vitesse de rotation est nulle (appelé couple de démarrage ou de décollage) soit supérieur au moment  $\gamma_{rd}$  du couple résistant correspondant :

$$\gamma_d > \gamma_{rd}$$

La phase de démarrage se déroule normalement si le moment du couple moteur reste supérieur au moment du couple résistant pendant toute sa durée. Le démarrage est d'autant plus rapide que la différence entre ces deux couples est importante.

##### ■ Durée de démarrage

La durée  $t_d$  de la phase de démarrage est obtenue en intégrant le principe fondamental de la dynamique entre la vitesse nulle et la vitesse atteinte  $\Omega$  :

$$t_d = J \int_0^{\Omega} \frac{d\omega}{\gamma - \gamma_r}$$

Il n'est pas possible de donner une formule littérale pour le résultat qui est obtenu par une méthode numérique. Nous pouvons néanmoins constater que la durée du démarrage est d'autant plus longue que le moment d'inertie est élevé.

##### ■ Bilan énergétique

En multipliant la relation fondamentale de la dynamique par  $\omega$ , nous obtenons un bilan des puissances instantanées :

$$J\omega \frac{d\omega}{dt} = \gamma\omega - \gamma_r\omega$$

Il reste à intégrer entre 0 et  $t_d$  pour obtenir le bilan des énergies :

$$\frac{1}{2}J\Omega^2 = \int_0^{t_d} \gamma\omega dt - \int_0^{t_d} \gamma_r\omega dt$$

Le premier membre de cette égalité représente l'énergie cinétique du moteur en régime permanent de vitesse de rotation  $\Omega$ . Le premier terme de la différence apparaissant au second membre est l'énergie fournie par le couple moteur pendant la phase de démarrage et le deuxième terme est l'énergie nécessaire pour vaincre les couples résistants.

### 1.4.5 Freinage

#### ■ Types de freinage

Le freinage peut être obtenu en supprimant simplement le couple moteur. C'est alors la charge et les pertes qui font décroître la vitesse jusqu'à l'arrêt. Ce mode de freinage n'est pas très rapide. Pour accélérer le phénomène, il faut imposer un couple résistant en modifiant l'alimentation électrique du moteur.

#### ■ Durée de freinage

La durée  $t_f$  de la phase de freinage est obtenue en intégrant le principe fondamental de la dynamique entre la vitesse initiale  $\Omega$  et la vitesse nulle :

$$t_f = J \int_{\Omega}^0 \frac{d\omega}{\gamma - \gamma_r}$$

#### ■ Bilan énergétique

Reprenons le bilan des puissances instantanées :

$$J\omega \frac{d\omega}{dt} = \gamma\omega - \gamma_r\omega$$

Suivant les cas, le couple moteur peut être nul (par exemple quand on ouvre le circuit d'induit d'un moteur à courant continu à excitation indépendante) ou négatif (par exemple pour un moteur asynchrone lors du freinage par inversion du sens du champ tournant ou par injection de courant continu), ce qui correspond en réalité à un couple résistant.

Il reste à intégrer entre 0 et  $t_f$  pour obtenir le bilan des énergies :

$$-\frac{1}{2}J\Omega^2 = \int_0^{t_f} \gamma\omega dt - \int_0^{t_f} \gamma_r\omega dt$$

Le premier membre de cette égalité représente l'opposé de l'énergie cinétique du moteur en régime permanent de vitesse de rotation  $\Omega$ . Le premier terme de la diffé-

rence apparaissant au second membre est l'énergie fournie par le couple moteur pendant la phase de freinage et le deuxième terme est l'énergie nécessaire pour vaincre les couples résistants.

## 1.5 Méthodes d'étude et de modélisation des moteurs

La modélisation de la machine est nécessaire aussi bien pour son concepteur que pour son utilisateur amené à l'intégrer dans un système complet. Suivant le besoin, différents niveaux de modélisations sont possibles.

### 1.5.1 Difficultés d'une modélisation élémentaire

#### ■ Principe d'un moteur à conducteurs dans l'entrefer

Les explications élémentaires du fonctionnement d'un moteur électrique font en général appel à la loi de Laplace<sup>1</sup>. Un conducteur de longueur  $l$  parcouru par un courant d'intensité  $i$  et placé à la périphérie du rotor d'une machine dans un champ magnétique radial (si la perméabilité des matériaux ferromagnétiques est très élevée) de norme  $B$ , est en effet soumis à une force tangentielle de norme  $F = |i|Bl$ . L'ensemble des forces appliquées à tous les conducteurs du rotor forme un couple qui fait tourner le moteur.

Ce raisonnement est parfaitement valable pour les petits actionneurs électriques utilisés dans le domaine de la robotique quand les conducteurs sont bien placés directement dans l'entrefer. Les moteurs à rotor discoïdal peuvent aussi être étudiés avec la loi de Laplace.

Par ailleurs, les conducteurs sont le siège d'une force électromotrice induite  $e = Blv$  à cause de leur déplacement à la vitesse  $v$  dans le champ magnétique.

#### ■ Paradoxe des encoches

Dans les moteurs industriels, les conducteurs sont placés dans des encoches, justement pour qu'ils ne soient pas soumis aux forces de Laplace qui entraîneraient des contraintes mécaniques insurmontables. Les dents en matériau ferromagnétique de grande perméabilité qui séparent les encoches canalisent les lignes de champ (*figure 1.8*).

Il en résulte que le champ magnétique auquel sont soumis les conducteurs est très faible. Le champ dans l'encoche est égal au champ dans une dent divisé par la perméabilité relative  $\mu_r$  du matériau ferromagnétique. Comme  $\mu_r$  est très élevée, le champ dans l'encoche est bien très petit. Les conducteurs ne sont soumis qu'à des forces de Laplace négligeables. Le raisonnement précédent ne s'applique donc pas à ces machines : ce ne sont pas les forces de Laplace qui font tourner les moteurs industriels.

La même difficulté apparaît pour la force électromotrice induite dans un conducteur. Compte tenu de la faible valeur du champ magnétique  $B$ , on pourrait penser que la

1. L'appellation « loi de Laplace » n'est utilisée qu'en France et dans certains pays francophones ; elle est inconnue ailleurs.

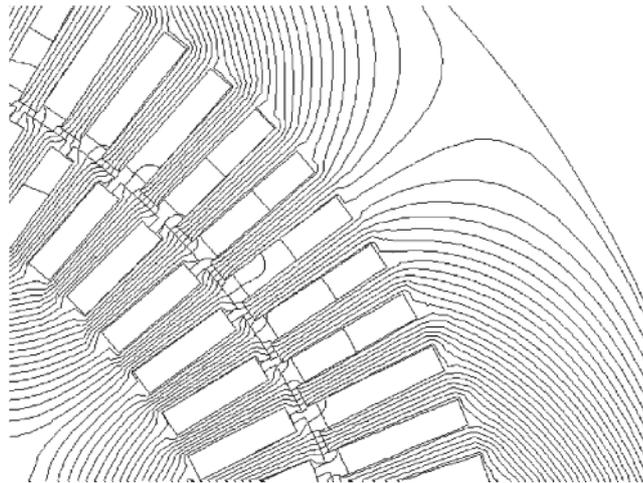


Figure 1.8 – Lignes de champ pour les encoches et les dents.

force électromotrice induite dans un conducteur placé dans une encoche est inférieure à la force électromotrice induite dans un conducteur placé directement dans l'entrefer. Ce n'est pas le cas car la vitesse  $v$  de déplacement du conducteur par rapport au champ est très élevée, les lignes de champ sautant brusquement d'une dent à la suivante (figure 1.9).

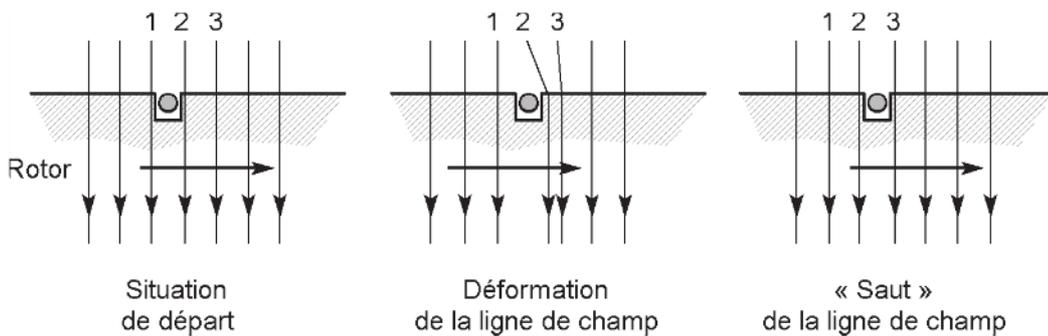


Figure 1.9 – Passage d'une ligne de champ d'une dent à la suivante (sur une représentation développée du rotor).

La forte perméabilité du matériau ferromagnétique entraîne une déformation de la ligne de champ au niveau d'une encoche car la ligne a tendance à suivre la dent qui vient de passer devant elle. Elle saute ensuite vers la dent suivante lorsque celle-ci est assez proche. Ainsi, la force électromotrice  $e = Blv$  garde la même valeur que si les encoches n'existaient pas : la faiblesse de  $B$  est compensée par la valeur élevée de  $v$ . Toutefois, il ne faut pas compter sur cette formule pour calculer la force électromotrice car la détermination de  $v$  est impossible. Remarquons enfin que ces explications qualitatives sont assez artificielles : les lignes de champ n'ont pas de réalité physique, elles donnent uniquement une représentation commode de la distribution du champ magnétique.

### ■ Explication

En réalité, les forces électromagnétiques ne sont pas appliquées aux conducteurs, mais aux parties ferromagnétiques du rotor. Cela permet d'améliorer beaucoup la solidité mécanique du moteur. Néanmoins, la justification de ce fait est impossible avec les méthodes élémentaires de l'électromagnétisme. Il faut faire appel à des théories plus élaborées comme la méthode du tenseur de Maxwell.

Considérons un conducteur de longueur  $l$ , parcouru par un courant  $i$  et placé dans une encoche rectangulaire étroite : sa largeur  $d$  est faible devant sa hauteur  $h$  (figure 1.10).

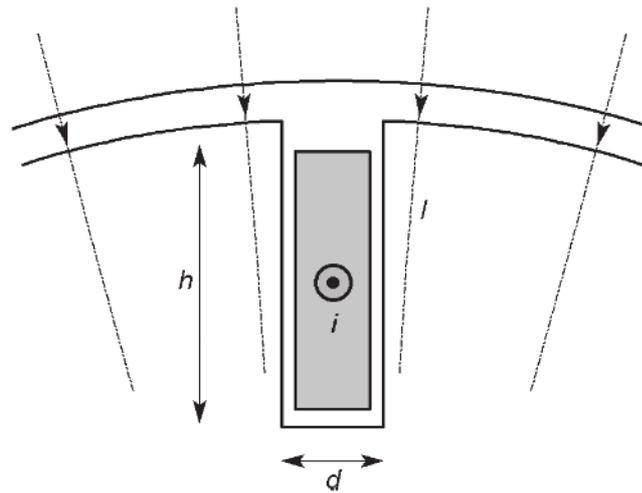


Figure 1.10 – Conducteur dans une encoche.

Un inducteur crée un champ magnétique  $B_0$  auquel correspond une excitation magnétique  $H_0$  dont les lignes de champ sont pratiquement tangentes aux côtés de l'encoche. La circulation du courant dans le conducteur crée une excitation magnétique supplémentaire  $H_i$  donnée par le théorème d'Ampère. Les deux termes s'ajoutent d'un côté de l'encoche et se retranchent de l'autre côté (figure 1.11) :

$$H_1 = H_0 + H_i = \frac{B_0}{\mu_0 \mu_r} + \frac{i}{2h}$$

$$H_2 = H_0 - H_i = \frac{B_0}{\mu_0 \mu_r} - \frac{i}{2h}$$

L'excitation magnétique étant tangentielle, elle crée une force normale sur chaque élément de surface  $dS$  des dents :

$$dF_1 = -\frac{1}{2} \mu_0 \mu_r H_1^2 dS$$

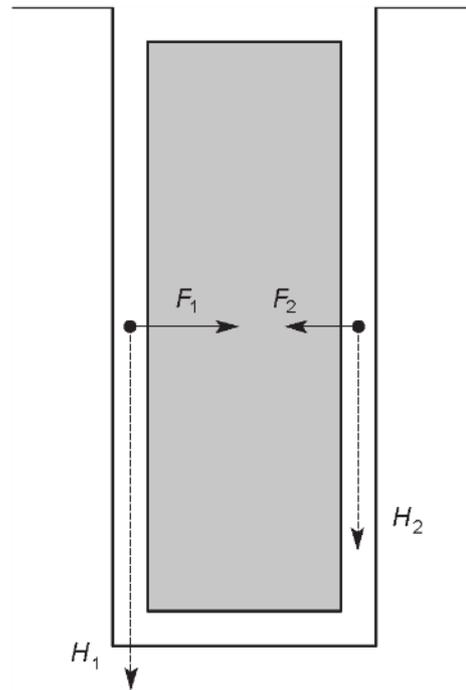


Figure 1.11 – Excitation magnétique à la surface des dents.

$$dF_2 = -\frac{1}{2}\mu_0\mu_r H_2^2 dS$$

La résultante des forces qui s'exercent sur les surfaces latérales des deux dents qui encadrent le conducteur est :

$$F = \iint_S -\frac{1}{2}\mu_0\mu_r (H_2^2 - H_1^2) dS = \frac{1}{2}\mu_0\mu_r 4 \frac{B_0}{\mu_0\mu_r} \frac{i}{2h} hl$$

soit :

$$F = iB_0 l$$

C'est bien la même force que celle qui s'exercerait sur le conducteur en l'absence d'encoches. Par contre, avec les encoches, la force qui s'exerce sur un conducteur est parfaitement négligeable puisqu'elle vaut :

$$F_c = \frac{iB_0 l}{\mu_r}$$

## 1.5.2 Approche interne de la modélisation

L'approche interne de la modélisation d'un moteur repose sur l'application des équations de Maxwell. Cette méthode est indispensable pour l'explication de phénomènes tels que l'effet de peau dans les conducteurs, les courants de Foucault...

Compte tenu des structures complexes des machines, les calculs sur le papier deviennent vite irréalisables. Les logiciels de modélisation électromagnétique prennent alors le relais. Ces modèles sont utilisés par les concepteurs des machines.

### 1.5.3 Approche externe de la modélisation

L'approche externe utilise les relations entre tensions, courants, flux, avec comme paramètres les inductances, les résistances. C'est une vision en termes de circuits. Les modèles obtenus pour un fonctionnement quelconque sont assez lourds. L'application des transformations de Concordia et de Park permet de les rendre plus commodes. Les modèles simplifiés valables pour les régimes permanents sont très simples d'emploi. Les logiciels de simulation prennent le relais pour les études plus complexes comme les régimes transitoires. Ces modèles sont également ceux qui sont utilisés pour la réalisation de la commande des moteurs.

## 2 • LOIS PHYSIQUES RÉGISSANT LE FONCTIONNEMENT DES MOTEURS

---

L'étude physique des moteurs fait appel aux équations de Maxwell. Dans ce chapitre, nous rappellerons la formulation générale de ces équations, puis nous discuterons des simplifications justifiées dans le domaine de l'électrotechnique. Nous étudierons ensuite un exemple caractéristique d'application : l'effet de peau dans les conducteurs d'une machine électrique. Nous décrirons enfin les logiciels qui permettent d'étudier en détail le fonctionnement d'une machine électrique.

### 2.1 Équations de Maxwell

#### 2.1.1 Forme générale

Les équations de Maxwell décrivent les propriétés locales d'un milieu sur le plan électrique et magnétique. Elles concernent le champ électrique  $\mathbf{E}$ , le champ magnétique  $\mathbf{B}$ , le déplacement électrique  $\mathbf{D}$  et l'excitation magnétique  $\mathbf{H}$  :

$$\mathbf{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\mathbf{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\mathbf{div} \mathbf{B} = 0 \quad (3)$$

$$\mathbf{div} \mathbf{D} = \rho_q \quad (4)$$

$\rho_q$  est la densité volumique de charge et  $\mathbf{J}$  le vecteur densité de courant.

#### 2.1.2 Relations propres aux matériaux

La description du milieu nécessite la connaissance de relations spécifiques qui s'écrivent pour un matériau isotrope et linéaire :

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (5)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (6)$$

$$\mathbf{E} = \rho \mathbf{J} \quad (7)$$

$\mu$  est la perméabilité du matériau,  $\varepsilon$  sa permittivité et  $\rho$  sa résistivité. La dernière relation est appelée loi d'Ohm locale.

### 2.1.3 Régime sinusoïdal permanent

En régime sinusoïdal permanent, toutes les coordonnées des vecteurs  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{J}$  sont des fonctions sinusoïdales du temps de même pulsation  $\omega$ . Par exemple, pour le champ magnétique :

$$\mathbf{B} = B_x \sqrt{2} \mathbf{u}_x \cos(\omega t + \psi_x) + B_y \sqrt{2} \mathbf{u}_y \cos(\omega t + \psi_y) + B_z \sqrt{2} \mathbf{u}_z \cos(\omega t + \psi_z)$$

$(\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z)$  est une base de l'espace,  $B_x, B_y, B_z$  sont les valeurs efficaces des composantes de  $\mathbf{B}$ ,  $\psi_x, \psi_y, \psi_z$  sont les phases à l'origine des composantes de  $\mathbf{B}$ . Les définitions sont analogues pour les autres vecteurs.

### 2.1.4 Grandeurs complexes

Les calculs se simplifient en utilisant les grandeurs complexes associées aux fonctions sinusoïdales. Par exemple, les grandeurs complexes associées aux composantes du champ magnétique sont définies par :

$$\underline{B}_x = B_x e^{j\psi_x}$$

$$\underline{B}_y = B_y e^{j\psi_y}$$

$$\underline{B}_z = B_z e^{j\psi_z}$$

Il faut remarquer que l'usage est de définir les modules des grandeurs complexes comme étant les valeurs efficaces en électricité alors que dans les autres domaines de la physique, les modules sont des amplitudes. Ces deux conventions ne diffèrent que par un facteur  $\sqrt{2}$  dans toutes les grandeurs, ce qui ne modifie en rien les équations, à condition que la convention soit la même partout. En électromagnétisme, nous rencontrons dans les mêmes équations des tensions, des courants, des champs magnétiques. Par commodité, nous choisirons des valeurs efficaces pour les modules de toutes ces grandeurs complexes.

Pour écrire une seule relation vectorielle plutôt que trois relations scalaires, on définit un vecteur champ magnétique complexe par :

$$\underline{\mathbf{B}} = \underline{B}_x \mathbf{u}_x + \underline{B}_y \mathbf{u}_y + \underline{B}_z \mathbf{u}_z$$

La même opération est faite pour les autres grandeurs vectorielles.

### 2.1.5 Équations de Maxwell pour les vecteurs complexes

Les équations de Maxwell peuvent s'écrire pour les vecteurs complexes en remarquant que dériver une fonction sinusoïdale du temps conduit à multiplier par  $j\omega$  la grandeur complexe associée. Ainsi, les quatre équations de Maxwell deviennent :

$$\mathbf{rot} \underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{J}} + j\omega \underline{\mathbf{D}} \quad (8)$$

$$\mathbf{rot} \underline{\mathbf{E}} = -j\omega \underline{\mathbf{B}} \quad (9)$$

$$\mathbf{div} \underline{\mathbf{B}} = 0 \quad (10)$$

$$\mathbf{div} \underline{\mathbf{D}} = \rho_q \quad (11)$$

Les relations caractéristiques du matériau peuvent également être écrites avec les vecteurs complexes : elles conservent la même forme puisqu'il ne s'agit que de relations de proportionnalité :

$$\underline{\mathbf{B}} = \mu \underline{\mathbf{H}} \quad (12)$$

$$\underline{\mathbf{D}} = \varepsilon \underline{\mathbf{E}} \quad (13)$$

$$\underline{\mathbf{E}} = \rho \underline{\mathbf{J}} \quad (14)$$

### 2.1.6 Charges dans un conducteur

En régime sinusoïdal permanent, associons l'équation de Maxwell (8) et la relation constitutive (13) :

$$\mathbf{rot} \underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{J}} + j\omega \varepsilon \underline{\mathbf{E}}$$

Prenons sa divergence :

$$\mathbf{div}(\mathbf{rot} \underline{\mathbf{H}}) = \mathbf{div} \underline{\mathbf{J}} + j\omega \varepsilon \mathbf{div} \underline{\mathbf{E}}$$

Or, la divergence d'un rotationnel est nulle et la loi d'Ohm locale montre que :

$$\mathbf{div} \underline{\mathbf{E}} = \rho \mathbf{div} \underline{\mathbf{J}}$$

En remplaçant dans la formule précédente, nous arrivons à :

$$\mathbf{div} \underline{\mathbf{J}} + j\omega \mu \rho \mathbf{div} \underline{\mathbf{J}} = 0$$

Il en résulte que  $\mathbf{div} \underline{\mathbf{J}} = 0$  et donc que  $\mathbf{div} \underline{\mathbf{E}} = 0$ . L'équation de Maxwell (11) entraîne que la densité volumique de charges  $\rho_q$  est nulle.

En régime sinusoïdal permanent, la densité de charge est nulle à l'intérieur d'un conducteur homogène : l'électrisation est purement superficielle. Ce résultat n'est pas rigoureusement vrai pour un régime variable quelconque. L'étude est beaucoup plus délicate, mais on montre que les charges volumiques disparaissent au bout d'une

durée extrêmement courte. Pratiquement, les charges volumiques sont donc nulles dans les conducteurs pour tous les régimes variables rencontrés en électrotechnique.

### 2.1.7 Équations de Maxwell pour un milieu conducteur dans le domaine quasi-statique

En électrotechnique, les équations de Maxwell pour un milieu conducteur peuvent être simplifiées car, les fréquences n'étant pas très élevées, la dérivée du vecteur déplacement électrique est négligeable par rapport au vecteur densité de courant. Cette approximation est nommée régime quasi-statique. La première équation de Maxwell devient ainsi :

$$\text{rot } \underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{J}}$$

En effet, le rapport de la norme du deuxième terme de la somme apparaissant au second membre de l'équation (1) à la norme du premier terme vaut  $\varepsilon\omega\rho$  pour un milieu linéaire de permittivité  $\varepsilon$  et en régime sinusoïdal permanent de pulsation  $\omega$ . Par exemple, pour le cuivre, dont la résistivité est  $\rho = 1,7 \times 10^{-8} \Omega \text{ m}$  et la permittivité, celle du vide,  $\varepsilon_0 = \frac{1}{36 \pi 10^9} \text{ Fm}^{-1}$ , le rapport vaut  $4,72 \times 10^{-17}$  à la fréquence de 50 Hz et  $9,44 \times 10^{-15}$  à la fréquence de 10 kHz. L'approximation est donc parfaitement vérifiée. Il en est de même pour tous les matériaux conducteurs à toutes les fréquences pouvant intervenir en électrotechnique. Par ailleurs, les équations concernant le vecteur déplacement électrique ne sont pas utilisées dans ce domaine.

Par contre, pour les matériaux diélectriques, c'est au contraire le vecteur densité de courant qui est négligeable devant la dérivée du vecteur déplacement électrique. La simplification précédente s'applique aux vecteurs réels tant que les variations ne sont pas trop rapides. En résumé, les équations de Maxwell utilisées pour un milieu conducteur en électrotechnique sont au nombre de trois et elles s'écrivent :

$$\text{rot } \underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{J}} \quad (15)$$

$$\text{rot } \underline{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \underline{\mathbf{B}}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\text{div } \underline{\mathbf{B}} = 0 \quad (3)$$

### 2.1.8 Répartition de l'excitation magnétique

Prenons le rotationnel de l'équation (15) :

$$\text{rot}(\text{rot } \underline{\mathbf{H}}) = \text{rot } \underline{\mathbf{J}}$$

Le premier membre de cette égalité peut être transformé en utilisant une propriété des opérateurs vectoriels :

$$\mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{H}) = \mathbf{grad}(\operatorname{div} \mathbf{H}) - \Delta \mathbf{H}$$

En tenant compte du fait que la divergence du vecteur  $\mathbf{B}$  est nulle et donc qu'il en est de même de la divergence du vecteur  $\mathbf{H}$ , cela donne :

$$-\Delta \mathbf{H} = \mathbf{rot} \mathbf{J}$$

Utilisons ensuite la relation (7) :

$$-\Delta \mathbf{H} = \mathbf{rot} \frac{\mathbf{E}}{\rho}$$

Avec la relation (2), nous obtenons :

$$-\Delta \mathbf{H} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Compte tenu de la relation (5), nous obtenons finalement :

$$\Delta \mathbf{H} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (16)$$

L'équation peut aussi être convertie en vecteurs complexes :

$$\underline{\Delta \mathbf{H}} = \frac{j\mu\omega}{\rho} \underline{\mathbf{H}} \quad (17)$$

### 2.1.9 Répartition de la densité de courant

Associons l'équation de Maxwell (2) avec la loi d'Ohm locale (7) :

$$\mathbf{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\mathbf{E} = \rho \mathbf{J} \quad (7)$$

Nous obtenons ainsi :

$$\rho \mathbf{rot} \mathbf{J} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Prenons le rotationnel de cette équation :

$$\mathbf{rot}(\rho \mathbf{rot} \mathbf{J}) = -\mathbf{rot} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Le premier membre de cette égalité peut être transformé en utilisant une propriété des opérateurs vectoriels :

$$\mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{J}) = \mathbf{grad}(\operatorname{div} \mathbf{J}) - \Delta \mathbf{J}$$

En tenant compte du fait que la divergence du vecteur  $\mathbf{J}$  est nulle, cela donne :

$$-\rho \Delta \mathbf{J} = -\mathbf{rot} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Tenons compte de la relation (5) :

$$\rho \Delta \mathbf{J} = \mu \mathbf{rot} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

Cela conduit à :

$$\Delta \mathbf{J} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial (\mathbf{rot} \mathbf{H})}{\partial t}$$

soit, compte tenu de la relation (15) :

$$\Delta \mathbf{J} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}$$

L'équation peut aussi être convertie en vecteurs complexes :

$$\Delta \underline{\mathbf{J}} = \frac{j\mu\omega}{\rho} \underline{\mathbf{J}} \quad (18)$$

### 2.1.10 Potentiel vecteur

Le champ magnétique  $\mathbf{B}$  dérive d'un potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  car sa divergence est nulle :

$$\mathbf{B} = \mathbf{rot} \mathbf{A}$$

Le choix du vecteur  $\mathbf{A}$  n'est pas unique et il faut imposer une condition supplémentaire appelée condition de jauge. Dans le domaine des régimes quasi-statiques, on choisit la jauge de Coulomb :

$$\text{div} \mathbf{A} = 0$$

Le potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  n'est pas une grandeur physique mesurable, mais un outil mathématique très commode.

Partons de l'équation de Maxwell (15) :

$$\mathbf{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

Tenons compte de la relation constitutive (5) :

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

Nous obtenons :

$$\frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{B} = \mathbf{J}$$

Introduisons ensuite le potentiel vecteur :

$$\frac{1}{\mu} \text{rot}(\text{rot } \mathbf{A}) = \mathbf{J}$$

Le premier membre de cette égalité peut être transformé en utilisant une propriété des opérateurs vectoriels :

$$\text{rot}(\text{rot } \mathbf{A}) = \text{grad}(\text{div } \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}$$

En tenant compte du fait que la divergence du vecteur  $\mathbf{A}$  est nulle du fait du choix de la jauge de Coulomb, nous arrivons à :

$$-\Delta \mathbf{A} = \mu \mathbf{J}$$

soit :

$$\Delta \mathbf{A} + \mu \mathbf{J} = 0$$

C'est une équation vectorielle de Poisson.

## 2.2 Effet de peau

En continu, la densité de courant dans un fil est uniforme. Il n'en est pas de même en régime variable à cause des phénomènes d'induction créés par les champs magnétiques variables : c'est l'effet de peau, appelé aussi effet pelliculaire ou effet Kelvin.

### 2.2.1 Introduction

Considérons un conducteur cylindrique parcouru par un courant alternatif  $i$  (figure 2.1).

Un rectangle élémentaire ABCD, de longueur  $l$  et de largeur  $dr$  est situé à la distance  $r$  de l'axe. Son aire est  $dS = l dr$ . Le flux à travers cette surface est  $d\phi = B dS$ . Le champ magnétique  $B$  est dû au courant à l'intérieur du cylindre

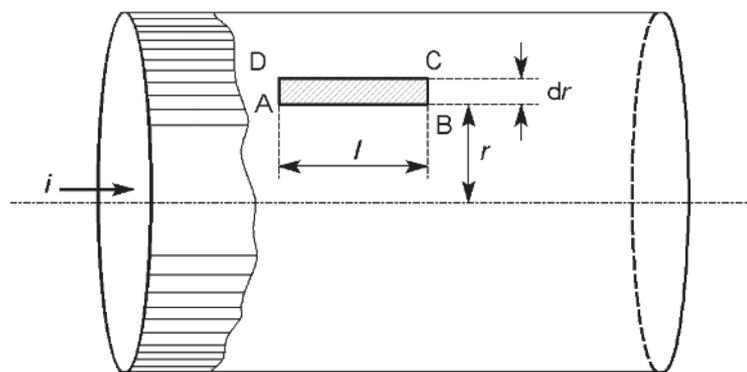


Figure 2.1 – Conducteur cylindrique.

de rayon  $r$ . La variation du courant entraîne la variation du champ magnétique, ce qui provoque l'apparition d'une force électromotrice  $e$ . Celle-ci tend à créer un courant dans le sens DCBA (loi de Lenz) qui s'ajoute au courant inducteur suivant DC et qui s'en retranche suivant AB. Il en résulte que la densité de courant augmente de l'axe du conducteur à sa périphérie.

### 2.2.2 Effet de peau dans un conducteur plan

Un courant sinusoïdal circule dans un conducteur homogène qui occupe le demi-espace  $z > 0$  d'un repère orthonormé  $Oxyz$  choisi de façon que le vecteur densité de courant  $\underline{J}$  soit suivant l'axe  $Oy$  (figure 2.2).

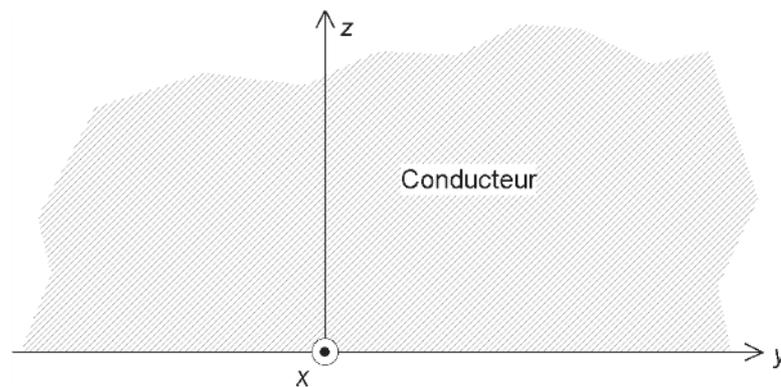


Figure 2.2 – Conducteur plan.

Le système physique étant invariant par translation suivant  $Ox$  et  $Oy$ , les grandeurs physiques ne dépendent que de la coordonnée  $z$ . La répartition de la densité de courant est déterminée par l'équation vectorielle (18) :

$$\Delta \underline{J} = \frac{j\mu\omega}{\rho} \underline{J}$$

L'unique composante  $J_y$  du vecteur densité de courant ne dépendant que de la coordonnée  $z$ , elle est régie par l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 J_y}{dz^2} - \frac{j\mu\omega}{\rho} J_y = 0$$

Posons :

$$\delta = \sqrt{\frac{2\rho}{\mu\omega}}$$

Pour l'instant, cette définition permet de simplifier l'écriture, mais nous donnerons ensuite une interprétation physique de ce paramètre  $\delta$ . L'équation devient :

$$\frac{d^2 \underline{J}_y}{dz^2} - j \frac{2}{\delta^2} \underline{J}_y = 0$$

La solution générale de cette équation différentielle est de la forme :

$$\underline{J}_y = A e^{-(1+j)\frac{z}{\delta}} + B e^{(1+j)\frac{z}{\delta}}$$

car :

$$(1+j)^2 = 2j$$

La constante  $B$  est nulle car la deuxième exponentielle augmente indéfiniment avec  $z$ , ce qui est physiquement impossible. La constante  $A$  est égale à la densité de courant  $\underline{J}_0$  au voisinage de la surface ( $z = 0$ ). La solution s'écrit donc :

$$\underline{J}_y = \underline{J}_0 e^{-(1+j)\frac{z}{\delta}}$$

Choisissons l'origine des temps pour que la densité de courant instantanée au voisinage de la surface soit un simple cosinus :

$$J_0 = J_{0M} \cos \omega t$$

La densité de courant instantanée à la profondeur  $z$  est alors :

$$J_y = J_{0M} e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)$$

L'amplitude de cette densité de courant diminue exponentiellement quand on pénètre dans le conducteur (*figure 2.3*).

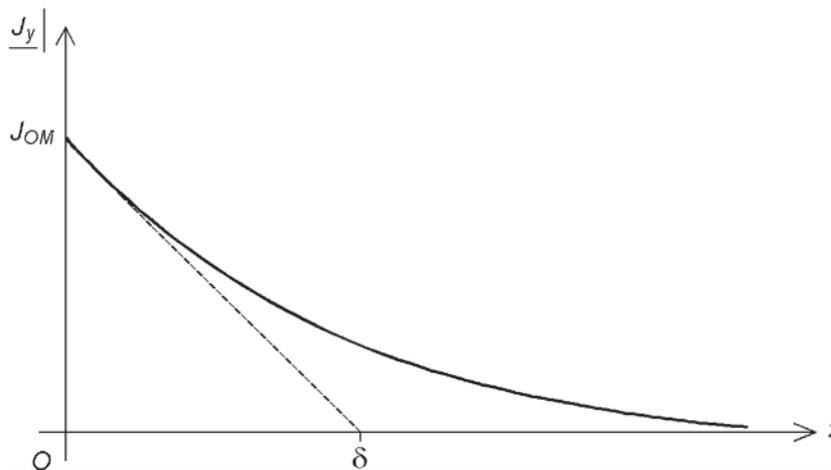


Figure 2.3 – Diminution de l'amplitude de la densité de courant dans un conducteur plan.

La valeur maximale est divisée par  $e$  (base des logarithmes népériens) lorsque  $z = \delta$ . Ce paramètre  $\delta$  est nommé « profondeur de pénétration » ou « épaisseur de peau ». On peut également l'exprimer en fonction de la fréquence en remplaçant  $\omega$  par  $2\pi f$  :

$$\delta = \sqrt{\frac{\rho}{\pi f \mu}}$$

Par ailleurs, le déphasage de la densité de courant à la profondeur  $z$  par rapport à la densité de courant au voisinage de la surface est une fonction linéaire de  $z$ .

Pour avoir un ordre de grandeur, chiffrons la profondeur de pénétration pour un conducteur en cuivre (résistivité  $\rho = 1,7 \times 10^{-8} \Omega\text{m}$  et perméabilité  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{H} \cdot \text{m}^{-1}$ ) à la fréquence de 50 Hz :

$$\delta = \sqrt{\frac{1,7 \times 10^{-8}}{\pi \times 50 \times 4\pi \times 10^{-7}}} = 9,28 \text{ mm}$$

### 2.2.3 Effet de peau dans un conducteur cylindrique

Un courant sinusoïdal circule dans un conducteur cylindrique d'axe  $Oz$  (figure 2.4).



Figure 2.4 – Conducteur cylindrique.

#### ■ Expression de la densité de courant

La répartition de la densité de courant dans le conducteur est toujours régie par l'équation (18) :

$$\Delta \underline{J} = \frac{j\mu\omega}{\rho} \underline{J}$$

Le vecteur  $\underline{J}$  n'a qu'une composante  $J_z$  suivant l'axe  $Oz$  du conducteur et celle-ci ne dépend que de la distance  $r$  à cet axe.

Compte tenu de l'expression du laplacien en coordonnées cylindriques, l'équation devient :

$$\frac{d^2 J_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dJ_z}{dr} - \frac{j\mu\omega}{\rho} J_z = 0$$

Introduisons l'épaisseur de peau  $\delta$  définie par :

$$\delta = \sqrt{\frac{2\rho}{\mu\omega}}$$

Cela conduit à :

$$\frac{d^2 J_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dJ_z}{dr} - \frac{2j}{\delta^2} J_z = 0$$

Nous avons ainsi une équation de Bessel à coefficients complexes. Pour se ramener à sa forme classique, effectuons le changement de variable défini par :

$$\zeta = \frac{1-j}{\delta} r$$

Il sera également commode dans la suite d'introduire le paramètre défini par :

$$\gamma = \frac{1-j}{\delta} = \frac{\sqrt{2} e^{-j\frac{\pi}{4}}}{\delta}$$

avec lequel le changement de variable s'écrit :

$$\zeta = \gamma r$$

Nous arrivons ainsi à :

$$\frac{d^2 J_z}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{dJ_z}{d\zeta} + J_z = 0$$

La solution générale de cette équation différentielle est :

$$J_z = AJ_0(\zeta) + BY_0(\zeta)$$

où  $J_0$  est la fonction de Bessel de première espèce et d'ordre 0 et  $Y_0$ , la fonction de Bessel de seconde espèce et d'ordre 0. La constante  $B$  est nulle car la fonction  $Y_0$  tend vers l'infini lorsque  $\zeta$  tend vers 0, ce qui est impossible physiquement. La constante  $A$  peut être exprimée en fonction de la densité de courant  $J_{z0}$  au voisinage de la surface du conducteur ( $r = a$ ) :

$$A = \frac{J_{z0}}{J_0(\gamma a)}$$

$$\underline{J_z} = \underline{J_{z0}} \frac{J_0(\gamma r)}{J_0(\gamma a)}$$

La constante d'intégration  $A$  peut également être exprimée à partir de l'intensité complexe  $\underline{I}$  du courant dans le fil, qui a une signification pratique plus directe :

$$\underline{I} = \iint_S \underline{J}_z dS$$

Avec les coordonnées cylindriques, cette intégrale s'écrit :

$$\underline{I} = A \int_0^a \int_0^{2\pi} J_0(\gamma r) r dr d\varphi$$

Pour la coordonnée  $\varphi$ , il s'agit simplement d'intégrer une constante et pour la coordonnée  $r$ , effectuons le changement de variable  $\zeta = \gamma r$  :

$$\underline{I} = 2\pi A \frac{1}{\gamma^2} \int_0^{\gamma a} J_0(\zeta) \zeta d\zeta$$

Le calcul de l'intégrale fait apparaître la fonction de Bessel de première espèce et d'ordre 1,  $J_1$  :

$$\underline{I} = 2\pi A \frac{1}{\gamma^2} \gamma a J_1(\gamma a)$$

Nous en déduisons l'expression de la constante  $A$  :

$$A = \frac{\underline{I} \gamma}{2\pi a J_1(\gamma a)}$$

L'expression de la densité de courant est finalement :

$$\underline{J}_z = \frac{\underline{I} \gamma}{2\pi a} \frac{J_0(\gamma r)}{J_1(\gamma a)}$$

### ■ Expression de l'excitation magnétique

Pour déterminer l'excitation magnétique à partir de la densité de courant, reprenons l'une des équations de Maxwell et deux des relations caractéristiques du matériau :

$$\mathbf{rot} \underline{\mathbf{E}} = -j\omega \underline{\mathbf{B}}$$

$$\underline{\mathbf{E}} = \rho \underline{\mathbf{J}}$$

$$\underline{\mathbf{B}} = \mu \underline{\mathbf{H}}$$

Ces trois relations conduisent à :

$$\rho \mathbf{rot} \underline{\mathbf{J}} = -j\omega \mu \underline{\mathbf{H}}$$

$\underline{J}$  n'ayant qu'une composante axiale  $J_z$ ,  $\underline{H}$  n'a qu'une composante azimutale  $H_\varphi$  telle que :

$$-\rho \frac{dJ_z}{dr} = -j\omega\mu \underline{H}_\varphi$$

et donc :

$$\underline{H}_\varphi = \frac{\rho}{j\omega\mu} \frac{dJ_z}{dr}$$

Cette formule peut s'écrire :

$$\underline{H}_\varphi = \frac{\delta^2}{2j} \frac{dJ_z}{dr} = -\frac{1}{\gamma^2} \frac{dJ_z}{dr}$$

Compte tenu que la dérivée de  $J_0$  est  $-J_1$ , nous obtenons :

$$\underline{H}_\varphi = \frac{1}{\gamma^2} \frac{I\gamma}{2\pi a} \gamma \frac{J_1(\gamma r)}{J_0(\gamma a)}$$

soit, après simplification :

$$\underline{H}_\varphi = \frac{I}{2\pi a} \frac{J_1(\gamma r)}{J_0(\gamma a)}$$

## ■ Courbes

Comme le paramètre  $\gamma$  est complexe, il en est de même des fonctions de Bessel qui apparaissent dans les expressions précédentes. Pour calculer les modules, il faut d'abord séparer les parties réelles des parties imaginaires de ces fonctions :

$$J_0\left(xe^{-j\frac{\pi}{4}}\right) = \text{ber } x + j \text{bei } x$$

Les valeurs des fonctions de Kelvin ber et bei sont disponibles dans des tables. Nous pouvons alors écrire le module de la densité de courant complexe :

$$|\underline{J}_z| = |\underline{J}_{z0}| \frac{\sqrt{\text{ber}^2 \frac{\sqrt{2}r}{\delta} + \text{bei}^2 \frac{\sqrt{2}r}{\delta}}}{\sqrt{\text{ber}^2 \frac{\sqrt{2}a}{\delta} + \text{bei}^2 \frac{\sqrt{2}a}{\delta}}}$$

Il est alors possible de tracer la courbe de  $\frac{|J_z|}{J_{z0}}$  en fonction de  $r$ , avec  $\frac{a}{\delta}$  en paramètre (figure 2.5). Le tracé des courbes de l'excitation magnétique en fonction de  $r$ , avec le même paramètre, se fait de manière analogue.

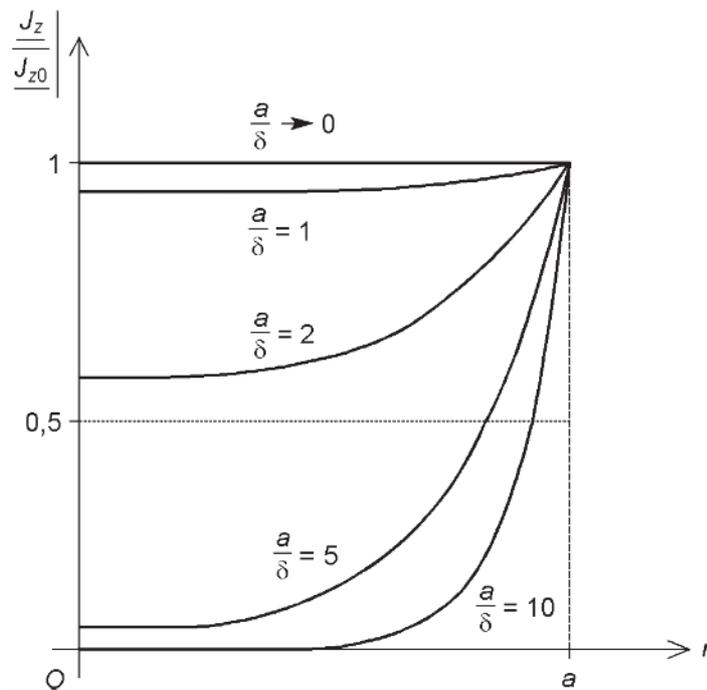


Figure 2.5 – Courbes de la densité de courant et de l'excitation magnétique dans un fil.

### 2.2.4 Effet de peau dans un conducteur placé dans une encoche

Dans les moteurs, les conducteurs sont placés dans des encoches taillées dans le matériau ferromagnétique. La répartition des courants est alors différente. Cet effet est souvent un inconvénient : la résistance apparente augmente du fait de l'effet de peau, ce qui accroît les pertes par effet Joule. Le phénomène est d'autant plus important que les encoches sont profondes et que la fréquence des courants est élevée. Pour les moteurs alimentés sur le secteur à 50 Hz et fonctionnant en régime permanent, les conséquences sont très minimes. Par contre, le phénomène ne peut pas être négligé pour les moteurs alimentés par un convertisseur électronique à cause de la présence des harmoniques de fréquence plus élevée. Dans certains cas, l'effet de peau est favorisé pour pouvoir utiliser ses conséquences : nous verrons au paragraphe 9.1.1 que les moteurs asynchrones à encoches profondes ont des performances au démarrage bien meilleures que les moteurs asynchrones ordinaires.

■ **Calcul de la résistance et de l'inductance de fuites quand la densité de courant est uniforme**

Lorsque la fréquence est très basse, le courant se répartit uniformément sur toute la profondeur des barres. Considérons une barre rectangulaire de hauteur  $h$ , de largeur  $b$  et de longueur  $L$  (figure 2.6). Ce conducteur est parcouru par un courant sinusoïdal de fréquence très basse pour lequel on peut estimer que la densité de courant est uniforme comme en continu :

$$i = I_M \cos \omega t$$

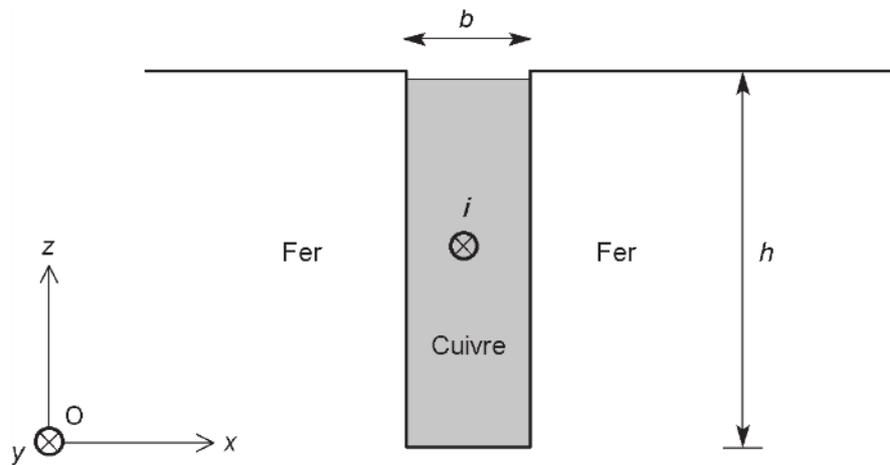


Figure 2.6 – Coupe d'une barre.

En appelant  $\rho$  la résistivité du matériau conducteur, la résistance  $r_0$  de la barre s'exprime par :

$$r_0 = \rho \frac{L}{hb}$$

L'inductance est calculée à partir de l'énergie magnétique. Il faut d'abord déterminer l'excitation magnétique  $H$  et le champ magnétique  $B$  dans l'encoche. Appliquons pour cela le théorème d'Ampère à une ligne de champ (figure 2.7). Celle-ci est transversale dans l'encoche car les lignes de champ sont perpendiculaires à la surface du matériau ferromagnétique à forte perméabilité : l'excitation se réduit à sa composante  $H_x$  sur l'axe  $Ox$ . Il en est de même pour le champ magnétique, qui ne comporte qu'une composante  $B_x$  sur l'axe  $Ox$ . Par ailleurs, la circulation de l'excitation dans ce matériau ferromagnétique peut être négligée compte tenu de la faible réluctance du trajet, liée elle aussi à la forte perméabilité. Nous obtenons ainsi :

$$H_x b = I \frac{z}{h}$$

$$H_x = I \frac{z}{bh}$$

La perméabilité du matériau conducteur étant  $\mu_0$ , nous pouvons déterminer la composante du champ magnétique :

$$B_x = \mu_0 I \frac{z}{bh}$$

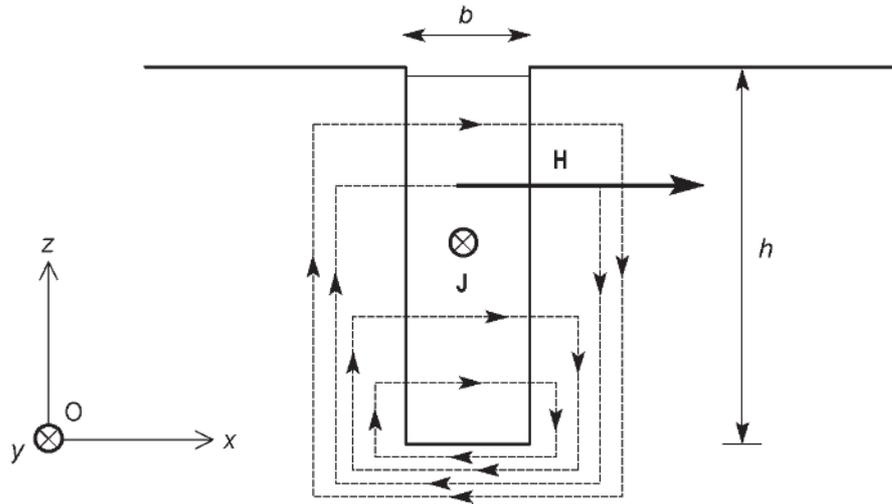


Figure 2.7 – Ligne de champ.

Il est alors possible d'exprimer l'énergie magnétique  $W_0$  due au champ de fuites en intégrant l'énergie élémentaire dans le volume  $V$  de l'encoche :

$$W_0 = \frac{1}{2} \iiint_V BH dv$$

L'élément de volume étant  $dv = Lb dz$ , nous obtenons :

$$W_0 = \frac{1}{2} Lb \int_0^h B_x H_x dz$$

Compte tenu des expressions de  $B_x$  et de  $H_x$ , nous avons :

$$W_0 = \frac{1}{2} Lb \int_0^h \mu_0 \frac{z^2}{b^2 h^2} I^2 dz$$

$$W_0 = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{L}{bh^2} I^2 \left[ \frac{z^3}{3} \right]_0^h$$

$$W_0 = \mu_0 \frac{Lh}{6b} I^2$$

L'inductance de fuites  $l_0$  d'une barre est obtenue à identifier l'expression de l'énergie à :

$$W_0 = \frac{1}{2} l_0 I^2$$

Nous obtenons :

$$l_0 = \mu_0 \frac{L b}{3b}$$

### ■ Détermination de l'excitation magnétique et de la densité de courant

Quand la fréquence des courants n'est plus très faible, la densité de courant n'est plus uniforme dans l'encoche. Les répartitions de l'excitation magnétique  $\mathbf{H}$  et de la densité de courant  $\mathbf{J}$  sont obtenues à partir des équations de Maxwell. Comme nous sommes en régime sinusoïdal permanent, nous considérons les vecteurs complexes  $\underline{\mathbf{H}}$  et  $\underline{\mathbf{J}}$  associés aux vecteurs  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{J}$ . Reprenons l'équation (17) en notant que la perméabilité du conducteur est  $\mu_0$  :

$$\Delta \underline{\mathbf{H}} = \frac{j\mu_0\omega}{\rho} \underline{\mathbf{H}}$$

Puisque le vecteur excitation magnétique  $\mathbf{H}$  n'a qu'une composante  $H_x$  suivant l'axe  $Ox$ , qui n'est fonction que de la seule coordonnée  $z$ , cette équation devient :

$$\frac{d^2 \underline{H}_x}{dz^2} = \frac{j\mu_0\omega}{\rho} \underline{H}_x$$

Elle peut se mettre sous la forme :

$$\frac{d^2 \underline{H}_x}{dz^2} - \beta^2 \underline{H}_x = 0$$

en posant :

$$\beta = (1 + j) \sqrt{\frac{\mu_0\omega}{2\rho}}$$

Faisons apparaître ici la profondeur de pénétration  $\delta$  :

$$\delta = \sqrt{\frac{2\rho}{\mu_0\omega}}$$

Nous obtenons ainsi :

$$\beta = \frac{1 + j}{\delta}$$

La solution générale de l'équation différentielle s'écrit :

$$\underline{H_x} = C_1 \text{ch } \beta z + C_2 \text{sh } \beta z$$

Les constantes  $C_1$  et  $C_2$  sont déterminées par les conditions aux limites. L'application du théorème d'Ampère au contour  $(\Gamma_1)$  donne (figure 2.8) :

$$\oint_{(\Gamma_1)} \underline{H_x} dl = \underline{H_x} b = 0$$

Nous en déduisons que  $\underline{H_x} = 0$  pour  $z = 0$  et donc que la constante  $C_1$  est nulle.

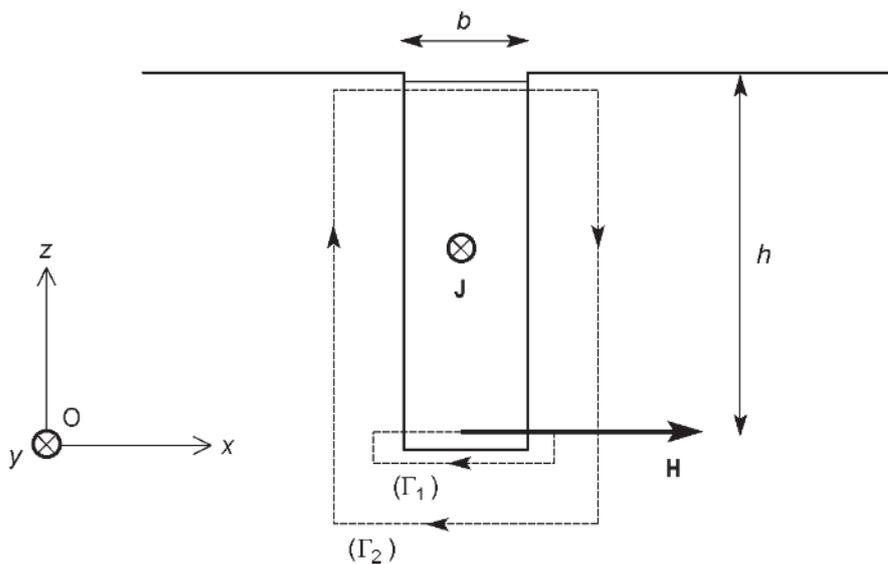


Figure 2.8 – Contours utilisés pour la détermination des conditions aux limites.

L'application du théorème d'Ampère au contour  $(\Gamma_2)$  donne :

$$\oint_{(\Gamma_2)} \underline{H_x} dl = \underline{H_x} b = I$$

Nous en déduisons que  $\underline{H_x} = \frac{I}{b}$  pour  $z = h$ , ce qui conduit à :

$$C_2 = \frac{I}{b \text{sh } \beta h}$$

L'expression de  $\underline{H_x}$  est donc finalement :

$$\underline{H_x} = \frac{I}{b} \frac{\text{sh } \beta z}{\text{sh } \beta h}$$

Nous pouvons en déduire la densité de courant grâce à l'équation de Maxwell :

$$\text{rot } \underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{J}}$$

Le vecteur densité de courant  $\underline{\mathbf{J}}$  n'a qu'une seule composante  $J_y$  suivant l'axe  $Oy$ . La grandeur complexe qui lui est associée est :

$$\underline{J}_y = \frac{dH_x}{dz}$$

soit :

$$\underline{J}_y = \frac{\beta I}{b} \frac{\text{ch } \beta z}{\text{sh } \beta b}$$

### ■ Calcul des pertes par effet Joule et de l'énergie magnétique due au champ de fuites

Les pertes par effet Joule dans le conducteur de volume  $V$  sont données par :

$$P_J = \iiint_V \rho |J_y|^2 dv$$

L'énergie magnétique due au champ de fuites s'écrit :

$$W = \frac{1}{2} \iiint_V \mu_0 |H_x|^2 dv$$

En tenant compte des expressions trouvées précédemment pour  $\underline{J}_y$  et  $\underline{H}_x$  et de l'expression du volume élémentaire,  $dv = Lb dz$ , nous obtenons :

$$P_J = \rho \frac{|\beta|^2 I^2}{b^2 |\text{sh } \beta b|^2} Lb \int_0^b |\text{ch } \beta z|^2 dz$$

$$W = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{I^2}{b^2 |\text{sh } \beta b|^2} Lb \int_0^b |\text{sh } \beta z|^2 dz$$

Les deux calculs seront menés en parallèle car ils font appel aux mêmes transformations. Utilisons deux formules de trigonométrie hyperbolique :

$$\text{ch}(a+b) = \text{ch } a \text{ch } b + \text{sh } a \text{sh } b$$

$$\text{sh}(a+b) = \text{sh } a \text{ch } b + \text{ch } a \text{sh } b$$

Par ailleurs, nous tiendrons compte du fait que :

$$\text{ch } ja = j \cos a$$

$$\text{sh } ja = j \sin a$$

Cela nous permet d'écrire :

$$\operatorname{ch}\beta z = \operatorname{ch}\frac{1+j}{\delta} z = \operatorname{ch}\frac{z}{\delta} \cos\frac{z}{\delta} + j \operatorname{sh}\frac{z}{\delta} \sin\frac{z}{\delta}$$

$$\operatorname{sh}\beta z = \operatorname{sh}\frac{1+j}{\delta} z = \operatorname{sh}\frac{z}{\delta} \cos\frac{z}{\delta} + j \operatorname{ch}\frac{z}{\delta} \sin\frac{z}{\delta}$$

Exprimons le carré du module des grandeurs précédentes :

$$|\operatorname{ch}\beta z|^2 = \operatorname{ch}^2\frac{z}{\delta} \cos^2\frac{z}{\delta} + \operatorname{sh}^2\frac{z}{\delta} \sin^2\frac{z}{\delta}$$

$$|\operatorname{sh}\beta z|^2 = \operatorname{sh}^2\frac{z}{\delta} \cos^2\frac{z}{\delta} + \operatorname{ch}^2\frac{z}{\delta} \sin^2\frac{z}{\delta}$$

Ces expressions se simplifient en utilisant les formules suivantes :

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \quad \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

$$\operatorname{ch}^2 a = \frac{\operatorname{ch} 2a + 1}{2} \quad \operatorname{sh}^2 a = \frac{\operatorname{ch} 2a - 1}{2}$$

Cela donne :

$$|\operatorname{ch}\beta z|^2 = \frac{1}{2} \left( \operatorname{ch}\frac{2z}{\delta} + \cos\frac{2z}{\delta} \right)$$

$$|\operatorname{sh}\beta z|^2 = \frac{1}{2} \left( \operatorname{ch}\frac{2z}{\delta} - \cos\frac{2z}{\delta} \right)$$

Il reste à remplacer dans les expressions de  $P_J$  et de  $W$  et à intégrer :

$$P_J = \frac{\rho L}{b \delta} \frac{\operatorname{sh}\frac{2b}{\delta} + \sin\frac{2b}{\delta}}{\operatorname{ch}\frac{2b}{\delta} - \cos\frac{2b}{\delta}} I^2$$

$$W = \frac{\mu_0 L \delta}{4b} \frac{\operatorname{sh}\frac{2b}{\delta} - \sin\frac{2b}{\delta}}{\operatorname{ch}\frac{2b}{\delta} - \cos\frac{2b}{\delta}}$$

### ■ Expression de la résistance et de l'inductance de fuites d'une barre

La résistance  $r$  et l'inductance de fuites  $l$  d'une barre sont obtenues à partir de la puissance  $P_J$  perdue par effet Joule et de l'énergie magnétique  $W$  due au champ de fuites :

$$P_J = rI^2$$

$$W = \frac{1}{2} lI^2$$

Il en résulte :

$$r = \frac{\rho L}{b\delta} \frac{\operatorname{sh} \frac{2h}{\delta} + \sin \frac{2h}{\delta}}{\operatorname{ch} \frac{2h}{\delta} - \cos \frac{2h}{\delta}}$$

$$l = \frac{\mu_0 L \delta}{2b} \frac{\operatorname{sh} \frac{2h}{\delta} - \sin \frac{2h}{\delta}}{\operatorname{ch} \frac{2h}{\delta} - \cos \frac{2h}{\delta}}$$

Il est d'usage de définir les valeurs relatives  $k_r$  pour la résistance et  $k_l$  pour l'inductance de fuites :

$$k_r = \frac{r}{r_0} = \frac{h}{\delta} \frac{\operatorname{sh} \frac{2h}{\delta} + \sin \frac{2h}{\delta}}{\operatorname{ch} \frac{2h}{\delta} - \cos \frac{2h}{\delta}}$$

$$k_l = \frac{l}{l_0} = \frac{3\delta}{2h} \frac{\operatorname{sh} \frac{2h}{\delta} - \sin \frac{2h}{\delta}}{\operatorname{ch} \frac{2h}{\delta} - \cos \frac{2h}{\delta}}$$

Nous pouvons alors tracer les courbes de  $k_r$  et de  $k_l$  en fonction de  $\frac{h}{\delta}$  (figure 2.9).

La courbe de la résistance réduite est pratiquement linéaire si  $\frac{h}{\delta}$  est supérieur à 3.

Elle se confond alors avec la droite de pente 1 passant par l'origine. Cela correspond à la formule approchée :

$$\frac{r}{r_0} \approx \frac{h}{\delta}$$

soit, en remplaçant  $r_0$  par son expression :

$$r \approx \rho \frac{L}{b\delta}$$

Si la hauteur de l'encoche est au moins trois fois la profondeur de pénétration, la résistance de la barre est à peu près égale à celle d'un conducteur de hauteur  $\delta$  parcouru par un courant de basse fréquence. C'est ce qui justifie le nom de profondeur de pénétration donné à  $\delta$ .

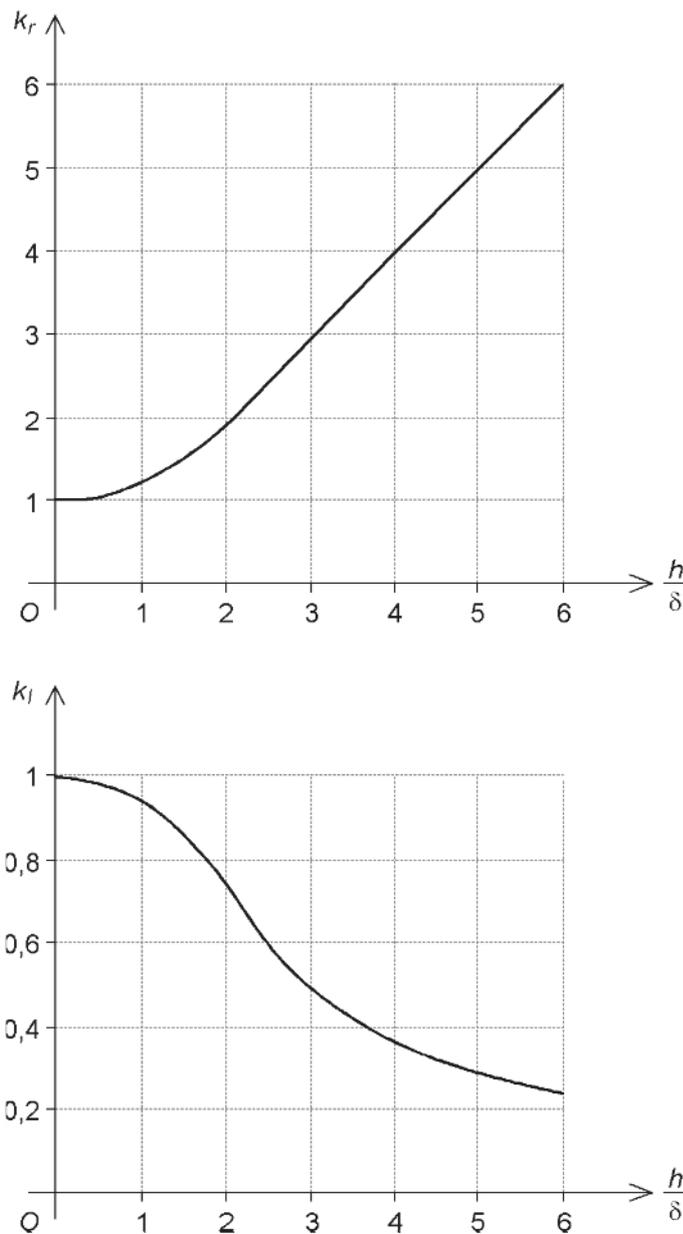


Figure 2.9 – Courbes de la résistance et l'inductance de fuites réduites d'une barre en fonction du rapport  $\frac{h}{\delta}$ .

## 2.3 Logiciels de calcul des champs

Hormis pour des structures très simples, la résolution des équations de Maxwell conduit à des calculs longs et compliqués. Des méthodes numériques effectuant ces calculs sur ordinateur ont été étudiées à partir des années 1970. Aujourd'hui, de nombreux logiciels permettent la résolution de ces problèmes. Ils sont basés sur la méthode des éléments finis ou des méthodes voisines. Les logiciels travaillent soit

en deux dimensions, soit en trois dimensions. Citons FLUX2D et FLUX3D, OPERA-2d et OPERA-3d, Maxwell 2D et Maxwell 3D, OERSTED...

L'utilisation de tels outils permet de se passer de calculs longs et fastidieux, mais surtout d'éviter la construction de coûteux prototypes. De plus, il est possible d'aller beaucoup plus loin dans l'optimisation des caractéristiques des moteurs, ce qui a permis d'améliorer la qualité tout en maîtrisant les coûts. La prise en compte d'un grand nombre de paramètres ajustables n'est possible qu'avec ces méthodes numériques. Les moteurs présentent une construction qui permet de faire l'essentiel de l'analyse en deux dimensions. Un logiciel travaillant en trois dimensions est toutefois nécessaire pour prendre en compte les effets d'extrémité.

La plupart des logiciels (FLUX2D et FLUX3D, OPERA-2d et OPERA-3d) utilisent la méthode des éléments finis (*Finite element method*, FEM). Certains logiciels (OERSTED) utilisent la méthode des éléments frontières (*Boundary element method*, BEM).

La méthode des éléments finis consiste à définir la constitution et la géométrie de la machine puis de la découper en un grand nombre de petits éléments surfaciques en deux dimensions ou volumiques (tétraèdres) en trois dimensions. La précision de la méthode est d'autant meilleure que la dimension de ces éléments est petite.

Un logiciel de simulation comprend :

- un module permettant la description géométrique du système ;
- un module permettant la définition des propriétés physiques des différentes parties du dispositif ;
- un mailleur automatique qui découpe le système en petits éléments ;
- un solveur qui analyse le modèle ;
- un module permettant d'exploiter les résultats sous diverses formes.

Copyright © 2005 Dunod. Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite à l'exception des cas prévus aux termes de l'article L.122-5, 2° et 3° a) du Code de la Propriété Intellectuelle.

## 3 • TENSION MAGNÉTIQUE D'ENTREFER D'UN MOTEUR ALTERNATIF

---

Copyright © 2005 Dunod. Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le  
© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit.  
aux termes de l'article L.122-5, 2° et 3° a) du Code de la Propriété Intellectuelle.

### 3.1 Enroulements triphasés

#### 3.1.1 Constitution des enroulements

##### ■ Enroulement distribué ou concentrés

Le stator d'un moteur alternatif est un cylindre creux muni d'encoches sur sa face interne (*figure 3.1*) où sont placés des conducteurs formant un enroulement distribué. Dans les moteurs asynchrones et les moteurs synchrones à entrefer constant, le rotor est un cylindre plein qui comporte des encoches sur sa face externe (*figure 3.2*) où sont placés des conducteurs formant un enroulement distribué. Les encoches sont creusées le long de génératrices du cylindre, ou sont faiblement inclinées par rapport aux génératrices. Dans les moteurs synchrones à pôles saillants, des bobines sont disposées sur des pôles ferromagnétiques (*figure 3.3*), ce qui forme un enroulement concentré.

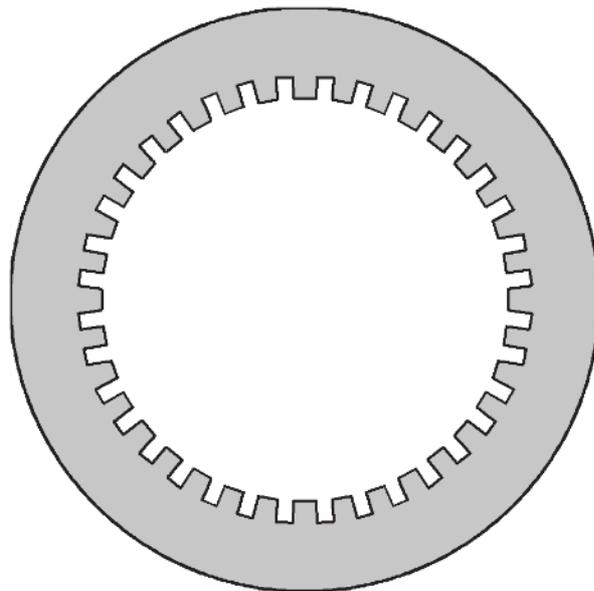
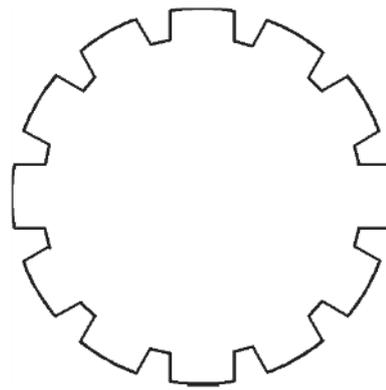
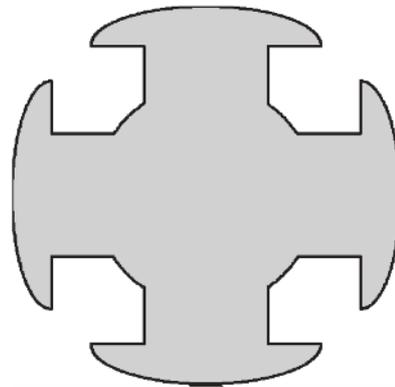


Figure 3.1 – Stator d'un moteur alternatif.



**Figure 3.2** – Rotor d'un moteur asynchrone ou d'un moteur synchrone à entrefer constant.



**Figure 3.3** – Rotor d'un moteur asynchrone ou d'un moteur synchrone à pôles saillants.

### 3.1.2 Conducteurs et spires

Des conducteurs sont placés dans les encoches. Deux conducteurs sont associés pour former une spire. Plusieurs spires peuvent être placées dans les mêmes encoches et mises en série. L'ensemble de ces conducteurs (appelés brins actifs) placés dans la même encoche est nommé faisceau. Une autre solution est de réaliser le faisceau par une barre de section adaptée : il est alors constitué d'un seul conducteur. Par convention, on représente un faisceau par un conducteur unique, qu'il soit formé d'une seule barre ou de plusieurs conducteurs.

### 3.1.3 Enroulement à une ou deux couches

Si chaque encoche comporte un seul faisceau (*figure 3.4*), l'enroulement est à une couche. Si chaque encoche comporte deux faisceaux (*figure 3.5*), l'enroulement est à deux couches.

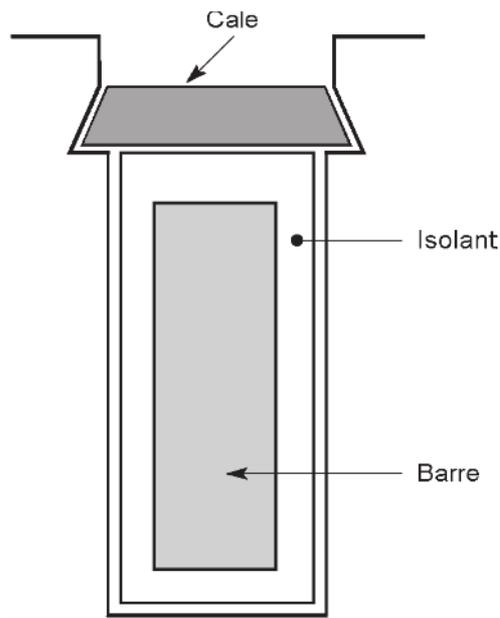


Figure 3.4 – Encoche d'un enroulement à une couche.

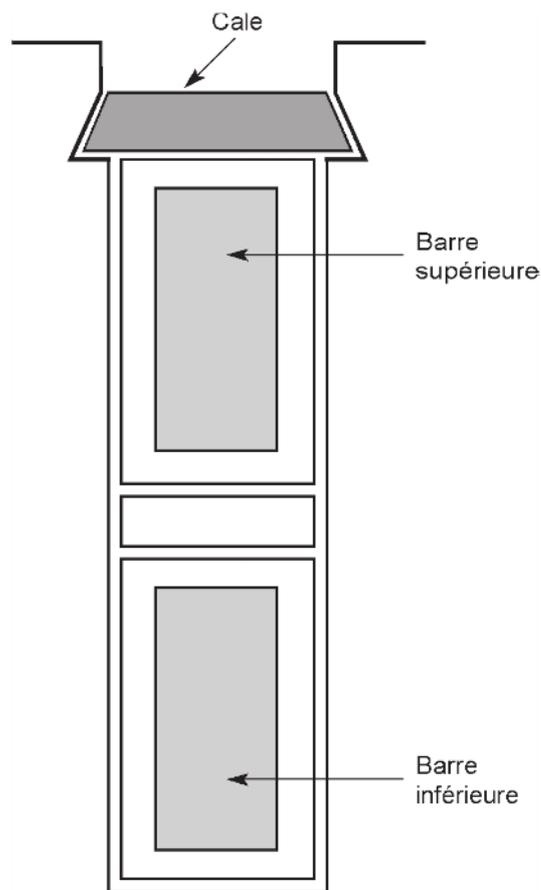


Figure 3.5 – Encoche d'un enroulement à deux couches.

### 3.1.4 Paramètres caractérisant un enroulement

#### ■ Nombre d'encoches par pôle et par phase

Si enroulement comporte  $q$  phases,  $2p$  pôles et  $N_e$  encoches, le nombre  $m$  d'encoches par pôle et par phase est :

$$m = \frac{N_e}{2pq}$$

En triphasé, cette définition devient :

$$m = \frac{N_e}{6p}$$

#### ■ Pas polaire

Le pas polaire est l'intervalle entre deux pôles successifs de noms contraires. On peut le caractériser de trois façons équivalentes par :

- l'angle séparant les axes des deux pôles,  $\alpha = \frac{\pi}{p}$  avec  $p$  le nombre de paires de pôles ;
- la distance entre ces deux pôles, mesurée le long de l'entrefer,  $\tau_p = \frac{\pi D}{2p}$  avec  $D$  le diamètre d'alésage ;
- le nombre d'encoches correspondant  $\frac{N_e}{2p}$  avec  $N_e$  le nombre total d'encoches.

#### ■ Pas dentaire

Le pas dentaire est l'intervalle entre deux encoches successives. On peut le caractériser de trois façons équivalentes par :

- l'angle séparant les axes des deux encoches,  $\varepsilon = \frac{2\pi}{N_e}$  ;
- l'angle électrique correspondant,  $\varepsilon_e = p\varepsilon$  ;
- la distance entre ces deux encoches, mesurée le long de l'entrefer,  $\tau_d = \frac{\pi D}{N_e} = \frac{\pi D}{2pqm} = \frac{\tau_p}{qm}$ .

### 3.1.5 Répartition des conducteurs dans les encoches

Les conducteurs des trois phases sont répartis dans les encoches. Dans une couche, les conducteurs d'une phase occupent sous un pôle des encoches successives. Le premier faisceau de la phase 1, nommé faisceau aller (c'est un sens conventionnel), est noté 1, tandis que le second faisceau, nommé faisceau retour, est noté 1'. Des notations analogues sont utilisées pour les phases 2 et 3. La succession des phases est donnée sur une représentation développée de l'entrefer avec un sens de gauche à droite correspondant au sens de rotation du moteur lorsqu'il est alimenté par un système triphasé direct (*figure 3.6*).

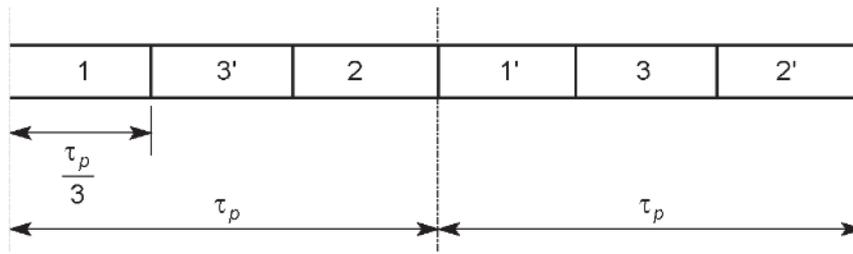


Figure 3.6 – Succession des phases sur un double pas polaire.

La distribution des faisceaux peut être précisée sur une vue en coupe de la machine (figure 3.7), mais on préfère souvent une représentation développée le long de l'entrefer (figure 3.8). Pour bien distinguer les conducteurs appartenant aux différentes phases, on les représente par des couleurs différentes, ou, en noir et blanc, par des symboles distincts : par exemple un cercle pour la phase 1, un carré pour la phase 2 et un triangle pour la phase 3. Nous avons choisi comme exemple un enroulement statorique bipolaire comportant six encoches par phase.

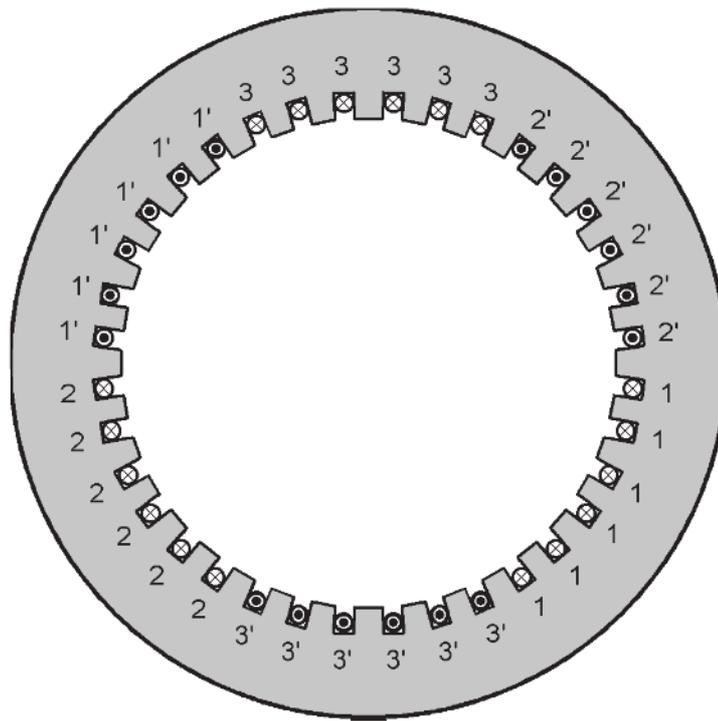


Figure 3.7 – Répartition des conducteurs d'un enroulement.



Figure 3.8 – Répartition des conducteurs sur une vue développée.

### 3.1.6 Connexions frontales

Les conducteurs actifs sont reliés entre eux sur les faces avant et arrière de la machine.

#### ■ Bobines et sections

L'enroulement peut être constitué de bobines concentriques ou de sections. L'enroulement en bobines est formé de spires concentriques ayant des pas inégaux (*figure 3.9*). Sa réalisation exige d'utiliser des gabarits différents. L'enroulement en section est formé d'éléments ayant tous le même pas et décalés entre eux (*figure 3.10*). L'intérêt est qu'un seul gabarit est nécessaire.

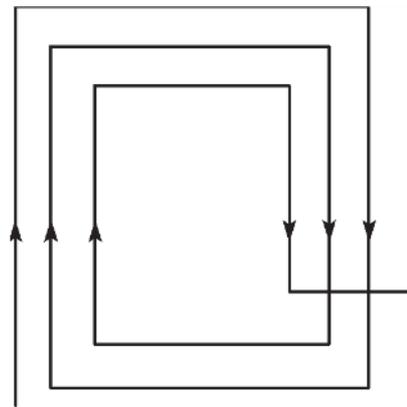


Figure 3.9 – Enroulement en bobines concentriques.

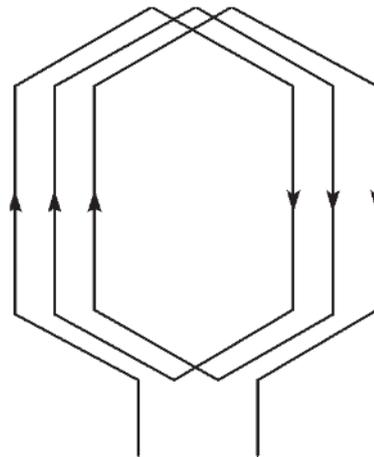


Figure 3.10 – Enroulement en sections.

#### ■ Enroulement par pôle ou par pôles conséquents

L'enroulement est par pôle si chaque phase comporte une bobine ou un groupe de sections par pôle (*figure 3.11*). Il est par pôles conséquents si chaque phase comporte une bobine ou un groupe de sections par paires de pôles (*figure 3.12*).

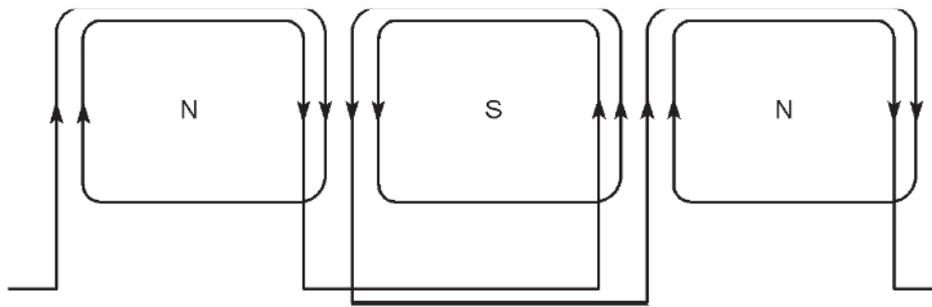


Figure 3.11 – Enroulement par pôle.

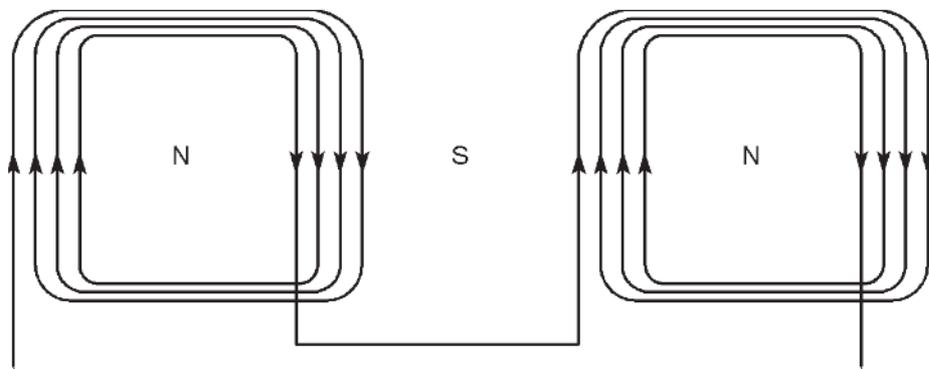


Figure 3.12 – Enroulement par pôles consécutifs.

### 3.1.7 Schéma de bobinage

Les diverses caractéristiques de l'enroulement sont figurées sur le schéma de bobinage : les conducteurs actifs sont représentés sur une vue développée et les connexions frontales sont indiquées au dessus et en dessous de celle-ci. Les trois phases sont distinguées par des couleurs différentes, ou, en noir et blanc, par des traits différents : nous avons employé le trait continu pour la phase 1, le trait mixte pour la phase 2 et le trait interrompu pour la phase 3. Comme exemple, nous avons choisi un enroulement triphasé ( $q = 3$ ) à 4 pôles ( $p = 2$ ), 24 encoches ( $N_e = 24$ ), en bobines et par pôles consécutifs (figure 3.13). Le nombre d'encoches par pôle et par phase est alors  $m = 2$ .

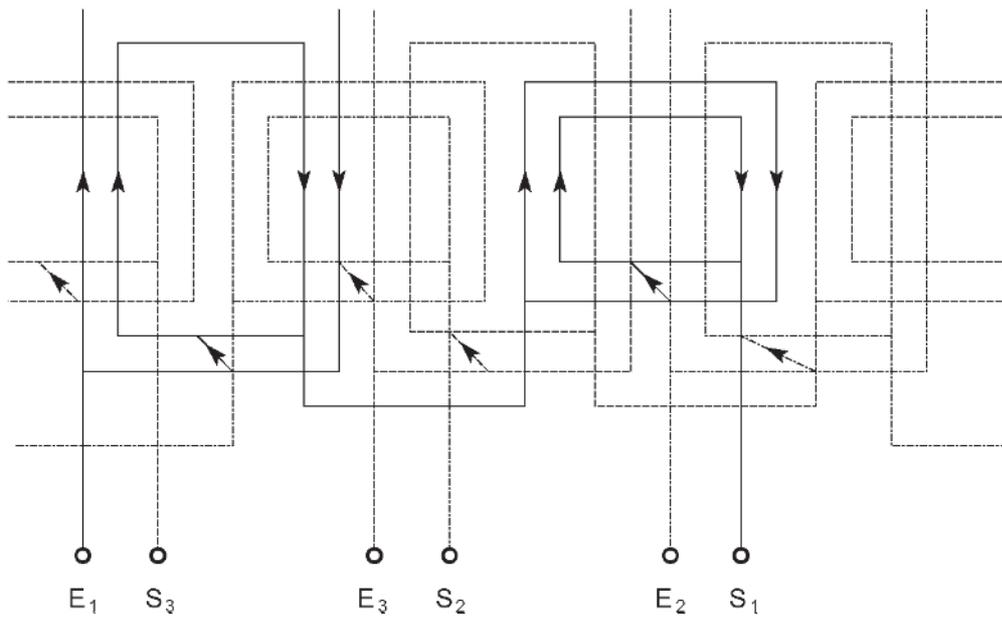


Figure 3.13 – Schéma de bobinage.

## 3.2 Création de la tension magnétique d'entrefer

### 3.2.1 Définition

La tension magnétique d'entrefer  $\mathcal{U}$  au point M repéré par l'angle  $\theta$  (figure 3.14) est la différence de potentiel magnétique entre le stator et le rotor :

$$\mathcal{U} = \int_{RS} \mathbf{H} d\mathbf{l}$$

Compte tenu que l'excitation magnétique  $\mathbf{H}$  est pratiquement radiale dans l'entrefer de largeur  $e$ , et que sa norme ne varie quasiment pas entre le rotor et le stator, cette relation s'écrit :

$$\mathcal{U} = He$$

$H$  est une mesure algébrique sur un axe radial repéré par l'angle  $\theta$  et orienté du rotor vers le stator. Ainsi, la tension magnétique d'entrefer est positive si le vecteur excitation magnétique  $\mathbf{H}$  (ou le vecteur champ magnétique  $\mathbf{B}$  qui a même direction et même sens) est dirigé du rotor vers le stator et négatif dans le cas contraire.

#### Remarque

Cette grandeur est parfois nommée « force magnétomotrice d'entrefer ». L'appellation est impropre car une force magnétomotrice correspond à l'action de courants enlacés par un contour fermé alors qu'il s'agit bien ici d'une chute de tension magnétique aux bornes de la réluctance de l'entrefer. La différence n'est pas énorme lorsque le circuit magnétique n'est pas saturé et que les chutes de tension magnétique dans les parties ferromagnétiques de la machine sont négligeables. Par contre, en cas de saturation, le comportement de la tension magnétique d'entrefer est tout à fait différent de celui de la force magnétomotrice du circuit car la réluctance des parties ferromagnétiques n'est plus négligeable.

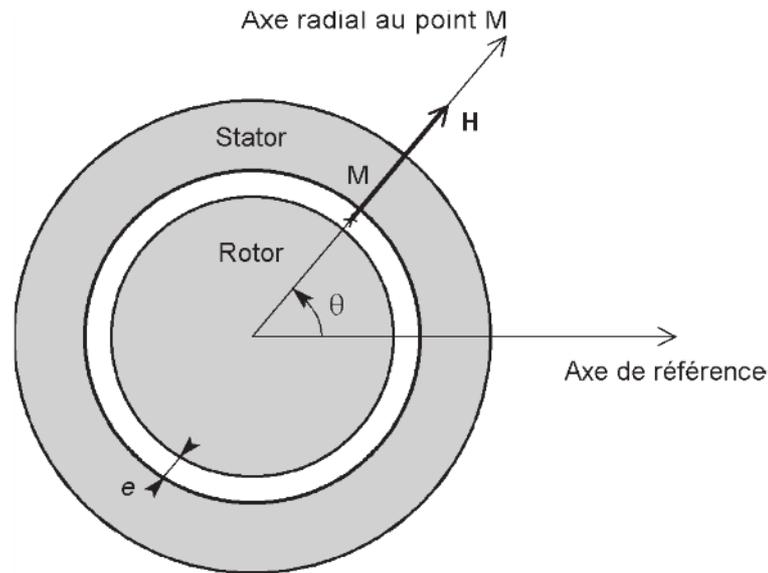


Figure 3.14 – Repérage d'un point M de l'entrefer.

Pour toutes les machines, la tension magnétique d'entrefer  $\mathcal{U}$  est fixée par la distribution des conducteurs parcourus par des courants.

Pour une machine à entrefer constant ( $e$  invariable), l'excitation magnétique  $H$  et le champ magnétique  $B$  sont également fixés par la distribution des conducteurs parcourus par des courants. On peut ainsi considérer indifféremment les grandeurs  $\mathcal{U}$ ,  $H$  ou  $B$  pour caractériser l'état magnétique de l'entrefer.

Par contre, pour une machine à pôles saillants, le problème de la détermination de l'excitation magnétique et donc du champ magnétique est plus compliqué : la courbe dépend de la position du rotor. Il est alors préférable de s'intéresser à  $\mathcal{U}$ .

### 3.2.2 Tension magnétique créée par un enroulement diamétral bipolaire

Considérons une armature portant une bobine placée dans deux encoches diamétralement opposées du stator et formée de  $N$  spires parcourues par un courant  $i$  (figure 3.15). Cela fait apparaître deux dents larges que nous nommerons A et B. Appliquons le théorème d'Ampère à une courbe ( $C_1$ ) qui n'entoure aucune encoche (figure 3.16) :

$$\oint_{(C_1)} \mathbf{H} d\mathbf{l} = 0$$

La circulation du vecteur excitation magnétique  $\mathbf{H}$  est une tension magnétique qui peut être décomposée en plusieurs termes ayant un comportement différent : les tensions magnétiques  $\mathcal{U}_M$  et  $\mathcal{U}_N$  aux bornes des deux entrefers traversés et les tensions magnétiques  $\mathcal{U}_s$  et  $\mathcal{U}_r$  qui correspondent aux trajets dans les matériaux ferromagnétiques du stator et du rotor :

$$\mathcal{U}_M + \mathcal{U}_s - \mathcal{U}_N + \mathcal{U}_r = 0$$

Copyright © 2005 Dunod. Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite à l'exception des cas prévus aux termes de l'article L.122-5, 2° et 3° a) du Code de la Propriété Intellectuelle.

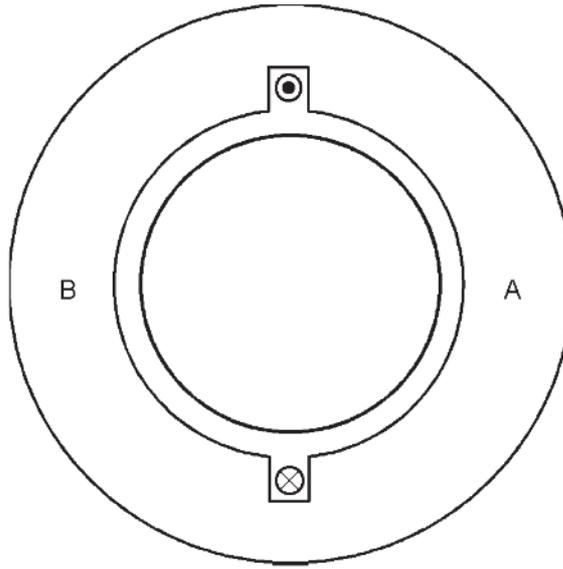


Figure 3.15 – Enroulement diamétral bipolaire.

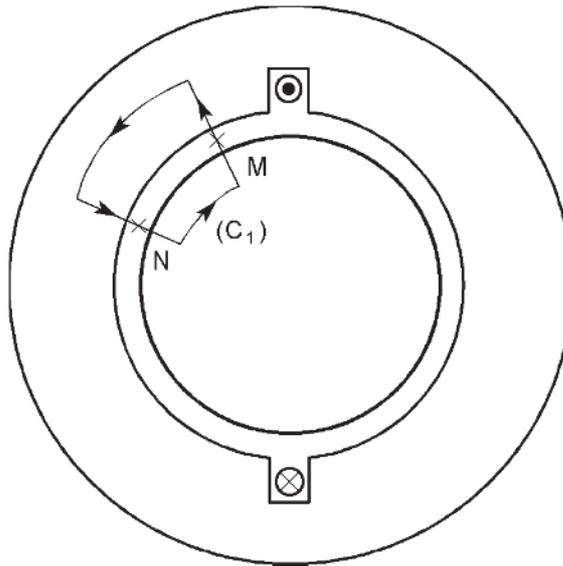


Figure 3.16 – Premier contour.

En l'absence de saturation, la circulation de l'excitation magnétique dans les parties ferromagnétiques du trajet est négligeable. Nous en déduisons :

$$\mathcal{U}_M = \mathcal{U}_N$$

La tension magnétique d'entrefer est la même pour tous les points de l'entrefer qui ne sont séparés par aucun conducteur parcouru par courant. Pour notre exemple, il y a donc deux valeurs de cette tension magnétique d'entrefer :  $\mathcal{U}_A$  sous la dent large A et  $\mathcal{U}_B$  sous la dent large B.

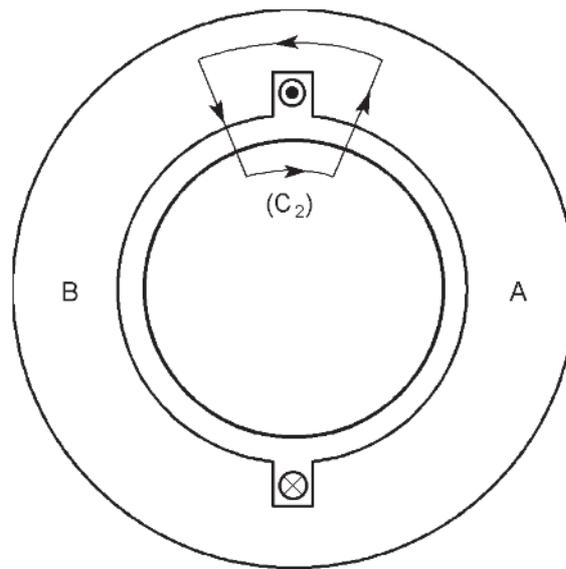


Figure 3.17 – Second contour.

Appliquons ensuite le théorème d'Ampère à une courbe  $(C_2)$  qui entoure une encoche (figure 3.17) :

$$\oint_{(C_2)} \mathbf{H}d\mathbf{l} = Ni$$

En négligeant toujours la circulation de l'excitation magnétique dans les parties ferromagnétiques du trajet, nous obtenons :

$$\mathcal{U}_A - \mathcal{U}_B = Ni$$

Par raison de symétrie, les tensions magnétiques aux bornes des deux entrefers traversés sont opposées :

$$\mathcal{U}_A = -\mathcal{U}_B$$

La formule précédente se réduit à :

$$2\mathcal{U}_A = Ni$$

La tension magnétique d'entrefer  $\mathcal{U}_A$  sous la dent large A est ainsi :

$$\mathcal{U}_A = \frac{Ni}{2}$$

Chacune des deux traversées de l'entrefer consomme la moitié de la force magnétomotrice  $\mathcal{F} = Ni$  de la bobine.

La courbe de  $\mathcal{U}$  en fonction de  $\theta$  est en forme de créneau sur une étendue angulaire de largeur  $2\pi$  (figure 3.18) : on dit que la tension magnétique d'entrefer est à répartition rectangulaire et qu'elle possède deux pôles (ou qu'elle est bipolaire). Le nombre  $p$  de paires de pôles vaut 1 dans ce cas.

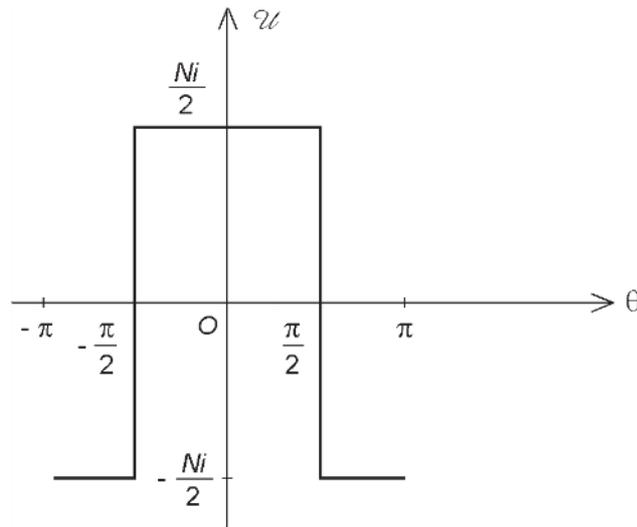


Figure 3.18 – Répartition spatiale de la tension magnétique d'entrefer.

### 3.2.3 Tension magnétique créée par un enroulement diamétral multipolaire

Plaçons maintenant dans quatre encoches de l'armature deux bobines formées de  $N$  spires parcourues par un courant  $i$ , de façon que les courants dans des encoches successives soient de sens opposé (figure 3.19).

Il y a quatre valeurs de tension magnétique d'entrefer :  $\mathcal{U}_A$  sous la dent large A,  $\mathcal{U}_B$  sous la dent large B,  $\mathcal{U}_C$  sous la dent large C et  $\mathcal{U}_D$  sous la dent large D.

Appliquons le théorème d'Ampère à des courbes entourant une encoche en négligeant comme précédemment la circulation de l'excitation magnétique dans les parties ferromagnétiques du trajet :

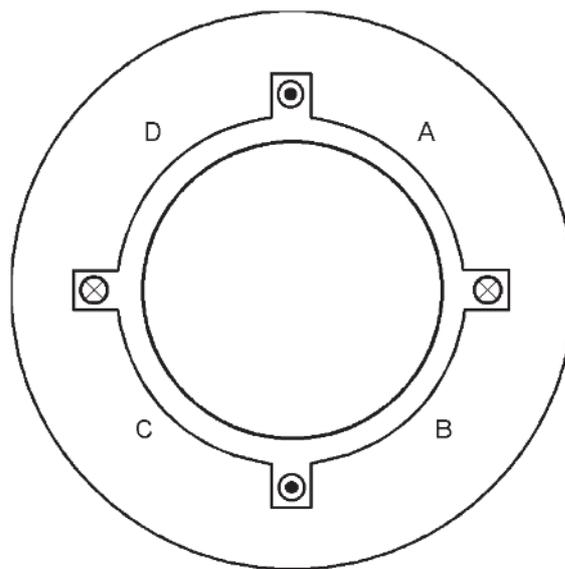


Figure 3.19 – Enroulement diamétral tétrapolaire.

$$\mathcal{U}_A - \mathcal{U}_D = Ni$$

$$\mathcal{U}_B - \mathcal{U}_A = -Ni$$

$$\mathcal{U}_C - \mathcal{U}_B = Ni$$

Nous en déduisons :

$$\mathcal{U}_B = \mathcal{U}_D$$

$$\mathcal{U}_A = \mathcal{U}_C$$

Écrivons par ailleurs la conservation du flux :

$$B_A + B_B + B_C + B_D = 0$$

Nous en déduisons :

$$B_A + B_B = 0$$

soit :

$$\mathcal{U}_A + \mathcal{U}_B = 0$$

Ainsi :

$$\mathcal{U}_A = \mathcal{U}_C = \frac{Ni}{2}$$

$$\mathcal{U}_B = \mathcal{U}_D = -\frac{Ni}{2}$$

La courbe de  $\mathcal{U}$  en fonction de  $\theta$  est encore en forme de créneau mais avec une période spatiale de  $\pi$  (*figure 3.20*) : on dit que la tension magnétique d'entrefer est à répartition rectangulaire et qu'elle possède quatre pôles (ou qu'elle est tétrapolaire). Le nombre  $p$  de paires de pôles vaut 2 dans ce cas.

En multipliant le nombre de bobines, il est possible d'obtenir des enroulements multipolaires ayant un nombre  $p$  de paires de pôles plus élevé.

La tension magnétique d'entrefer est une fonction périodique, de période  $\frac{2\pi}{p}$ , décomposable en série de Fourier. En utilisant la décomposition d'un signal carré donnée dans les tables de séries de Fourier, nous obtenons :

$$\mathcal{U} = \frac{2Ni}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cos[(2k+1)p\theta]$$

soit :

$$\mathcal{U} = \sum_{k=0}^{+\infty} A_{2k+1} \cos[(2k+1)p\theta]$$

avec :

$$A_{2k+1} = \frac{2Ni}{\pi} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

La tension magnétique d'entrefer d'un enroulement multipolaire a même expression que celle d'un enroulement bipolaire à condition de remplacer  $\theta$  par  $p\theta$ . Il est d'usage de se ramener systématiquement à un enroulement bipolaire en utilisant la notion d'angle électrique. Pour un enroulement à  $p$  paires de pôles, l'angle électrique  $\theta_e$  correspondant à l'angle réel  $\theta$  (appelé alors angle mécanique ou angle géométrique) est par définition :

$$\theta_e = p\theta$$

Il est possible de définir un enroulement bipolaire fictif associé à un enroulement multipolaire réel.

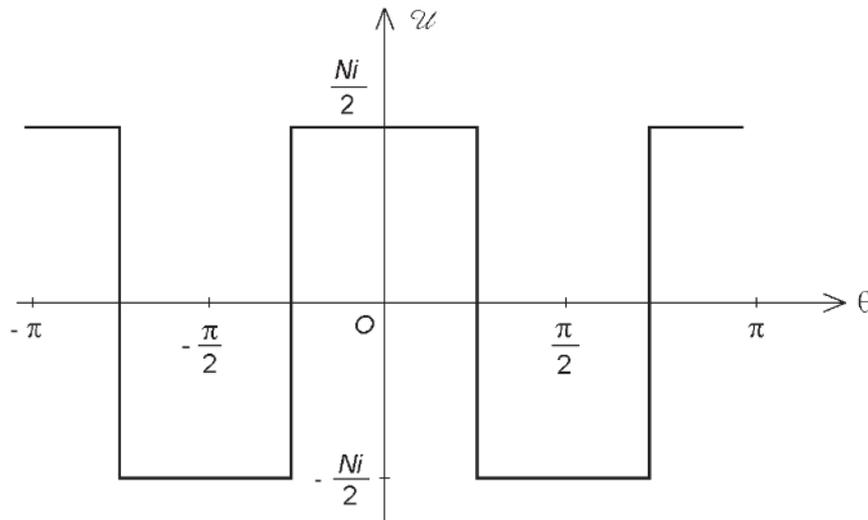


Figure 3.20 – Répartition spatiale de la tension magnétique d'entrefer.

### 3.2.4 Tension magnétique créée par un enroulement réparti diamétral

Pour éviter des encoches de grande dimension et pour que la courbe de la force magnétomotrice en fonction de l'angle se rapproche d'une sinusoïde, on répartit les  $N$  conducteurs d'un faisceau entre  $m$  encoches voisines, contenant chacune  $b$  conducteurs :

$$N = mb$$

Chaque phase est ainsi constituée de  $m$  bobines de  $b$  spires par paire de pôles. L'ouverture de chaque bobine est égale au pas polaire  $\alpha$ , mais elles sont décalées entre elles d'un angle  $\varepsilon$  (figure 3.21).

La courbe de la tension magnétique en fonction de l'angle est obtenue en faisant la somme des courbes rectangulaires qui correspondent aux  $m$  bobines et qui ont même

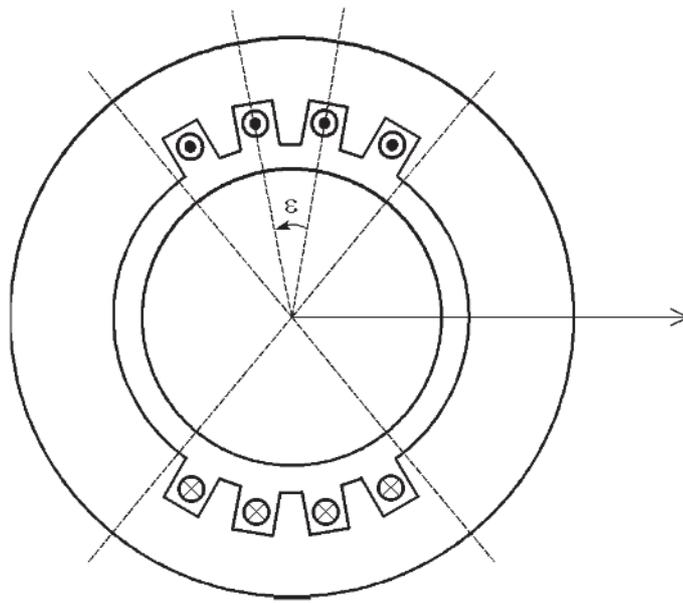


Figure 3.21 – Enroulement à  $m$  encoches par pôle et par phase.

amplitude  $\frac{bi}{2}$  ; mais qui sont décalées entre elles d'un angle  $p\varepsilon$  (figure 3.22). Nous avons choisi comme origine des angles l'axe de la bobine située la plus à droite sur la représentation développée de la phase. La variable angulaire est appelée  $\theta'$ . L'angle électrique correspondant est  $\theta'_e$ .

La tension magnétique résultante a une courbe en escaliers qui se rapproche de la sinusoïde si le nombre d'encoches par pôle et par phase est élevé.

En écrivant la décomposition en série de Fourier des tensions magnétiques à répartition rectangulaire de chaque bobine, exprimons la tension magnétique résultante :

$$\mathcal{U} = \frac{2}{\pi} bi \sum_{n=0}^{m-1} \left\{ \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \frac{(-1)^k}{2k+1} \cos[(2k+1)p(\theta' + n\varepsilon)] \right) \right\}$$

La somme présente dans les accolades peut être transformée grâce à la formule trigonométrique donnant la somme des cosinus d'angles en progression arithmétique :

$$\sum_{n=0}^{m-1} \cos(a + nq) = \frac{\sin \frac{mq}{2}}{\sin \frac{q}{2}} \cos \left[ a + \frac{(m-1)q}{2} \right]$$

Nous obtenons ainsi :

$$\mathcal{U} = \frac{2}{\pi} bi \sum_{k=0}^{+\infty} \left\{ \frac{(-1)^k}{2k+1} \frac{\sin \frac{mp(2k+1)\varepsilon}{2}}{\sin \frac{p(2k+1)\varepsilon}{2}} \cos \left[ p(2k+1) \left( \theta' + (m-1) \frac{\varepsilon}{2} \right) \right] \right\}$$

Copyright © 2005 Dunod. Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite à l'exception des cas prévus aux termes de l'article L.122-5, 2° et 3° a) du Code de la Propriété Intellectuelle.

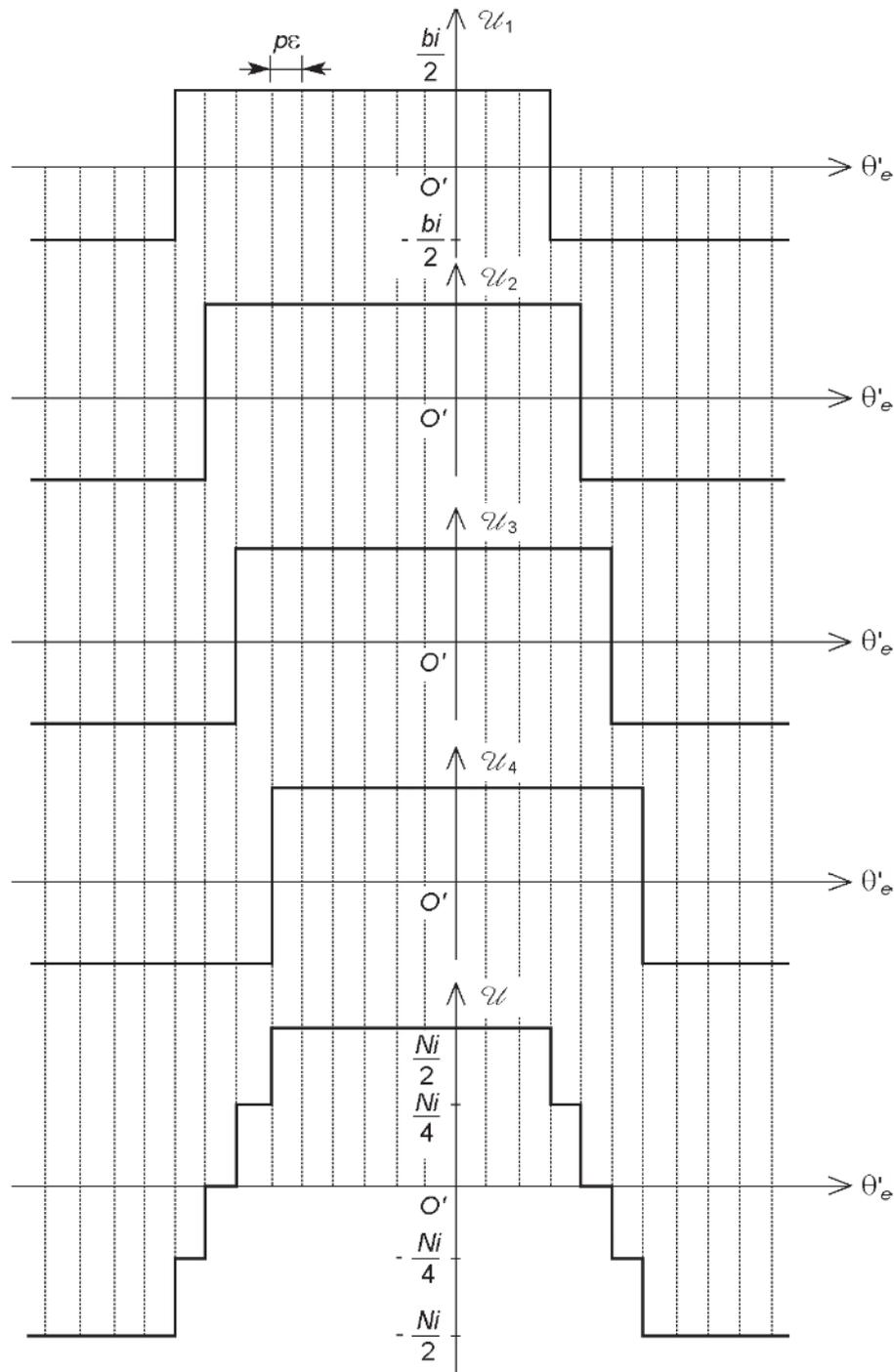


Figure 3.22 – Construction de la courbe de la tension magnétique en fonction de l'angle.

Changeons d'origine des angles pour la placer sur l'axe de symétrie de la courbe de la tension magnétique résultante (figure 3.23). La nouvelle variable angulaire est appelée  $\theta$  et l'angle électrique correspondant  $\theta_e$  :

$$\theta = \theta' + (m - 1) \frac{\epsilon}{2}$$

$$\theta_e = \theta'_e + (m-1) \frac{p\varepsilon}{2}$$

Nous obtenons ainsi :

$$u = \frac{2}{\pi} b i \sum_{k=0}^{+\infty} \left\{ \frac{(-1)^k}{2k+1} \frac{\sin \frac{mp(2k+1)\varepsilon}{2}}{\sin \frac{p(2k+1)\varepsilon}{2}} \cos [p(2k+1)\theta] \right\}$$

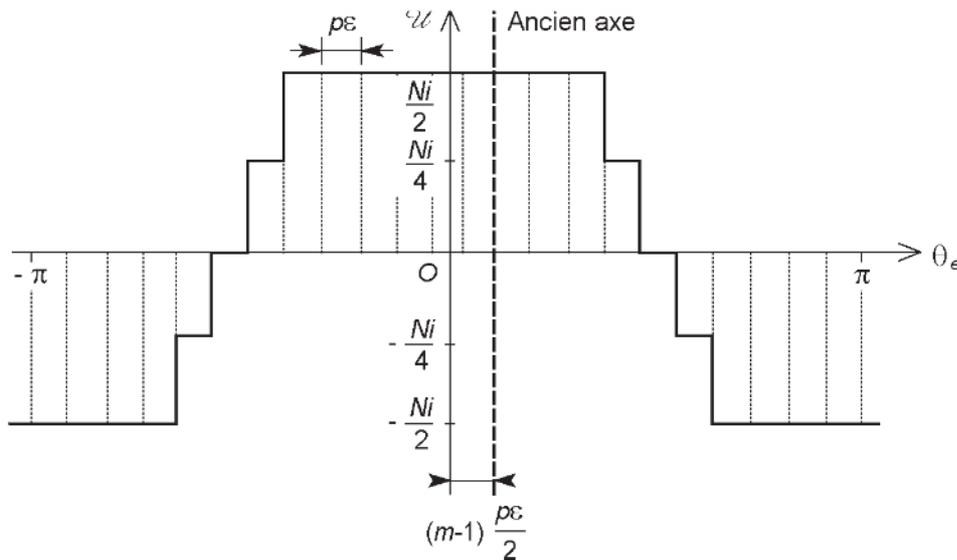


Figure 3.23 – Changement de l'origine des angles.

La tension magnétique créée par un enroulement réparti a même forme que la tension magnétique créée par un enroulement concentré, mais les coefficients placés devant les cosinus sont différents :

$$u = \sum_{k=0}^{+\infty} A'_{2k+1} \cos [p(2k+1)\theta]$$

avec :

$$A'_{2k+1} = \frac{2}{\pi} b i \frac{(-1)^k}{2k+1} \frac{\sin \frac{mp(2k+1)\varepsilon}{2}}{\sin \frac{p(2k+1)\varepsilon}{2}}$$

On définit le facteur de distribution  $K_{d1}$  pour le fondamental comme le rapport du fondamental de la répartition de la tension magnétique créée par un enroulement réparti au fondamental de la répartition de la tension magnétique d'un enroulement concentré de même nombre de conducteurs :

$$K_{d1} = \frac{A'_1}{A_1}$$

Son expression est :

$$K_{d1} = \frac{\frac{2}{\pi} bi \frac{\sin \frac{mp\varepsilon}{2}}{\sin \frac{p\varepsilon}{2}}}{\frac{2}{\pi} Ni}$$

Compte tenu que  $N = mb$ , la formule devient :

$$K_{d1} = \frac{\sin \frac{mp\varepsilon}{2}}{m \sin \frac{p\varepsilon}{2}}$$

De la même façon, le facteur de distribution  $K_{dh}$  pour l'harmonique de rang  $h = 2k + 1$  est :

$$K_{dh} = \frac{A'_h}{A_h}$$

Son expression est donc :

$$K_{dh} = \frac{\sin \frac{hmp\varepsilon}{2}}{m \sin \frac{hp\varepsilon}{2}}$$

La somme des différentes tensions magnétiques décalées peut s'interpréter géométriquement (*figure 3.24*).

On a considéré ici le fondamental et on a tracé dans le plan électrique les vecteurs  $\mathbf{A}_0\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_{m-1}\mathbf{A}_m$  qui représentent les tensions magnétiques de chaque bobine. Ces vecteurs ont même norme et sont décalés entre eux d'un angle  $\varepsilon_e = p\varepsilon$ . Le vecteur  $\mathbf{A}_0\mathbf{A}_m$  représente la tension magnétique résultante. Le coefficient de distribution  $K_{d1}$  pour le fondamental est le rapport de la corde  $A_0A_m$  à la longueur du contour polygonal  $A_0A_1\dots A_m$ , soit :

$$K_{d1} = \frac{A_0A_m}{mA_0A_1}$$

Ce contour est inscriptible dans un cercle de centre O et de rayon R. L'angle au centre correspondant au côté  $A_0A_1$  est  $p\varepsilon$  et l'angle au centre correspondant à la

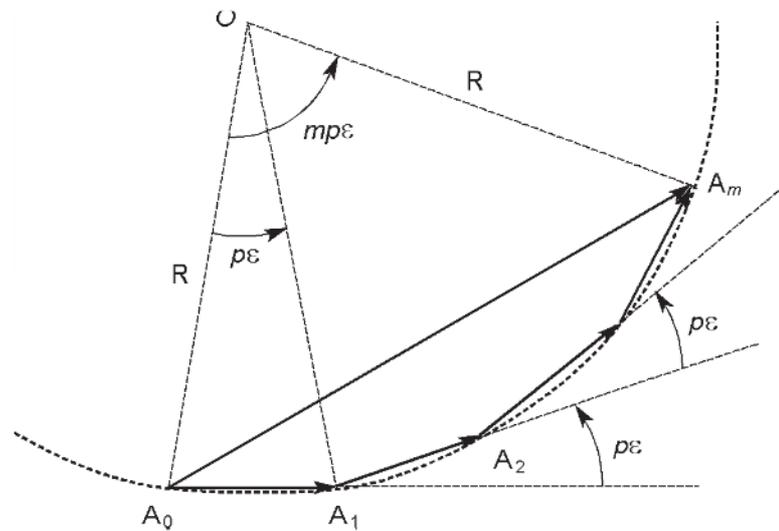


Figure 3.24 – Interprétation géométrique de la somme des tensions magnétiques décalées.

résultante  $A_0A_m$  est  $mp\varepsilon$ . En abaissant une hauteur du triangle  $OA_0A_1$ , on fait apparaître deux triangles rectangles dans lesquels on peut écrire :

$$A_0A_1 = 2R \sin \frac{p\varepsilon}{2}$$

En procédant de la même façon avec le triangle  $OA_0A_m$ , nous obtenons :

$$A_0A_m = 2R \sin \frac{mp\varepsilon}{2}$$

Nous retrouvons bien l'expression du facteur de distribution pour le fondamental :

$$K_{d1} = \frac{\sin \frac{mp\varepsilon}{2}}{m \sin \frac{p\varepsilon}{2}}$$

Pour un enroulement triphasé régulier comportant  $m$  encoches par pôle et par phase, l'angle entre deux encoches vaut :

$$\varepsilon = \frac{\pi}{3mp}$$

Les facteurs de distribution ne dépendent alors que de  $m$  :

$$K_{d1} = \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{m \sin \frac{\pi}{6m}}$$

$$K_{db} = \frac{\sin \frac{h\pi}{6}}{m \sin \frac{h\pi}{6m}}$$

### 3.2.5 Tension magnétique créée par une bobine à pas raccourci

Considérons une bobine dont le pas est  $\delta\pi$  avec  $\delta < 1$  (figure 3.25).

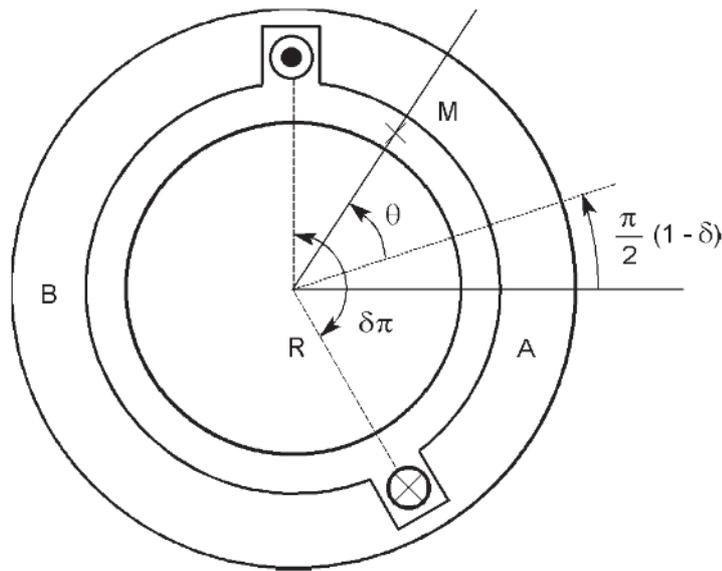


Figure 3.25 – Bobine à pas raccourci.

Le théorème d'Ampère appliqué à une courbe entourant une encoche donne :

$$\mathcal{U}_A - \mathcal{U}_B = Ni$$

Écrivons par ailleurs que le flux sortant du rotor est nul. Nous pouvons le décomposer en deux termes : le flux  $\varphi_A$  sortant de la surface  $S_A$  de la portion de cylindre correspondant à l'angle  $\delta\pi$  et le flux  $\varphi_B$  sortant de la surface  $S_B$  de la portion de cylindre correspondant à l'angle  $(1 - \delta)\pi$  :

$$\varphi_A + \varphi_B = 0$$

Le flux  $\varphi_A$  est le produit du champ magnétique  $B_A$  et de la surface  $S_A$  :

$$\varphi_A = B_A S_A$$

avec :

$$S_A = Rl\delta\pi$$

Le flux  $\Phi_B$  est le produit du champ magnétique  $B_B$  et de la surface  $S_B$  :

$$\Phi_B = B_B S_B$$

avec :

$$S_B = Rl(2 - \delta)\pi$$

La conservation du flux donne :

$$B_A Rl \delta \pi + B_B Rl(2 - \delta)\pi = 0$$

Nous en déduisons :

$$\frac{B_A}{B_B} = \frac{\delta - 2}{\delta}$$

et donc :

$$\frac{\mathcal{U}_A}{\mathcal{U}_B} = \frac{\delta - 2}{\delta}$$

Les deux relations entre  $\mathcal{U}_A$  et  $\mathcal{U}_B$  forment un système de deux équations à deux inconnues dont les solutions sont :

$$\mathcal{U}_A = \left(1 - \frac{\delta}{2}\right) Ni$$

et :

$$\mathcal{U}_B = -\frac{\delta}{2} Ni$$

La courbe de  $\mathcal{U}$  en fonction de  $\theta$  est un créneau dont les niveaux ne sont pas symétriques (figure 3.26).

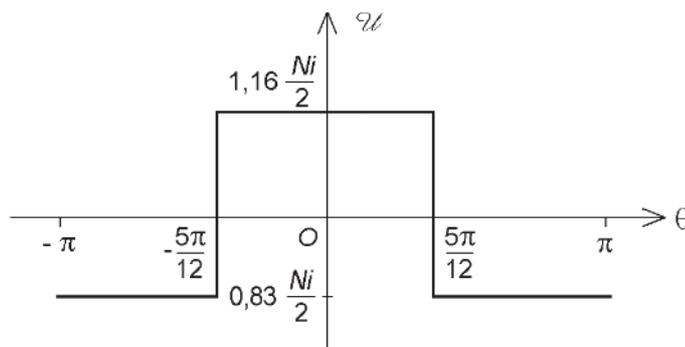


Figure 3.26 – Répartition spatiale de la tension magnétique d'entrefer (pour  $\delta = \frac{5}{6}$ ).

### 3.2.6 Tension magnétique créée par un enroulement réparti à pas raccourci

L'utilisation de sections à pas raccourci permet de réduire la longueur des têtes de bobines. Considérons un enroulement réparti avec  $m = 4$ . Réalisons le bobinage par sections et par pôles en utilisant des sections à pas raccourci avec  $\delta = \frac{5}{6}$  (figure 3.27).

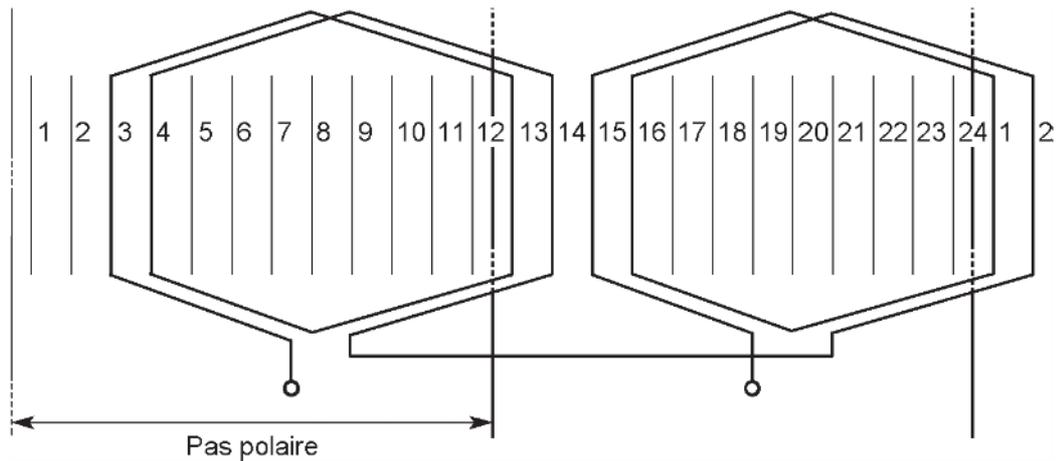


Figure 3.27 – Schéma de bobinage d'une phase.

Dans ce cas, la forme d'onde de la tension magnétique d'entrefer est la même pour un bobinage à pas raccourci que pour un bobinage à pas diamétral. Les décompositions en série de Fourier sont alors aussi identiques.

### 3.2.7 Tension magnétique créée par un enroulement réparti à phases chevauchantes

L'utilisation de sections à pas raccourci permet de faire un enroulement à phases chevauchantes (figure 3.28). Les encoches sont séparées en deux : une demi-encoche inférieure, au fond, et une demi-encoche supérieure, près de l'entrefer. Au lieu d'affecter un nombre entier  $m$  d'encoches à chaque phase, comme sur la répartition rappelée en haut de la figure, on lui attribue d'abord  $n$  demi-encoches, puis  $m - n$  encoches et enfin de nouveau  $n$  demi-encoches. Les demi-encoches non occupées sont attribuées aux autres phases. Pour la figure, on a choisi  $m = 3$  et  $n = 1$ . Pour le calcul de la tension magnétique d'entrefer, on prend en compte séparément la contribution des demi-encoches inférieures et celle des demi-encoches supérieures, puis on en fait la somme. Si  $\varepsilon$  est l'angle entre deux encoches, l'angle correspondant au décalage entre les deux courbes partielles est :

$$\eta = n\varepsilon$$

Une construction vectorielle permet d'effectuer la somme des contributions (figure 3.29).

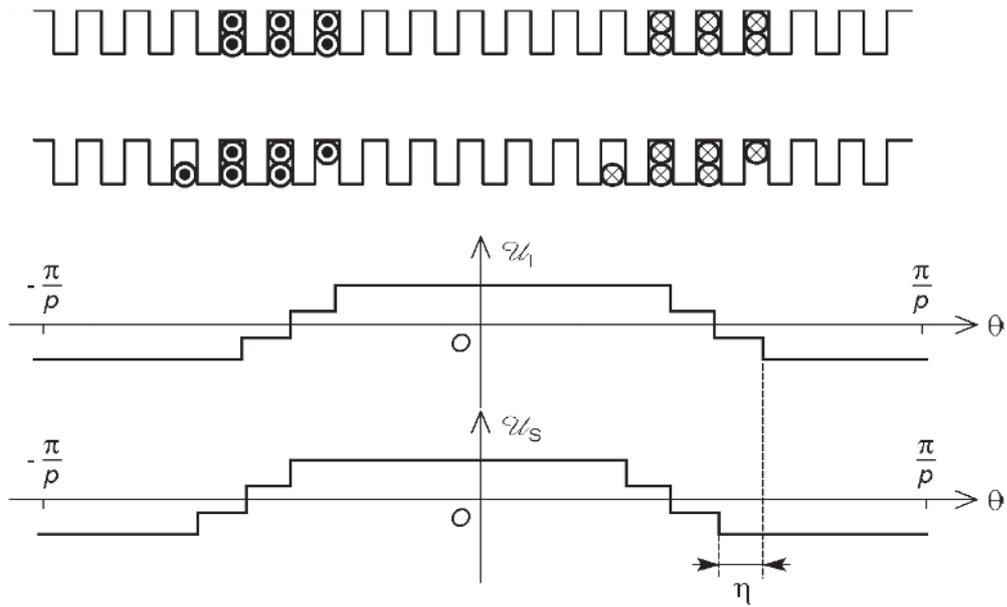


Figure 3.28 – Enroulement à phases chevauchantes.

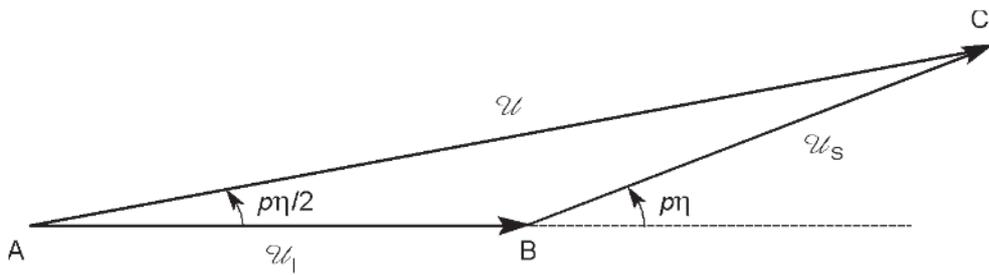


Figure 3.29 – Construction vectorielle de la tension magnétique d'entrefer.

On voit immédiatement que :

$$AC = 2 AB \cos \frac{p\eta}{2}$$

Il en résulte que le fondamental est multiplié par un coefficient  $K_{r1}$  appelé facteur de raccourcissement pour le fondamental dont l'expression est :

$$K_{r1} = \cos \frac{p\eta}{2}$$

Un raisonnement identique s'applique aux harmoniques. Le facteur de raccourcissement  $K_{rb}$  pour l'harmonique de rang  $b = 2k + 1$  est :

$$K_{rb} = \cos \frac{bp\eta}{2}$$

En remplaçant  $\eta = n\varepsilon$  puis  $\varepsilon = \frac{\pi}{3mp}$ , les formules deviennent :

$$K_{r1} = \cos \frac{n\pi}{6m}$$

$$K_{rb} = \cos \frac{hn\pi}{6m}$$

L'intérêt du chevauchement des phases est d'affaiblir les harmoniques. Un choix adéquat de  $n$  permet de diviser par 4 environ les harmoniques de rang 5 et 7.

### 3.2.8 Prise en compte de l'angle d'ouverture des encoches

Dans une machine à encoches larges, on ne peut plus considérer que les conducteurs sont localisés en un point (sur une vue en coupe), mais il faut tenir compte de l'angle  $\chi$  occupé par une encoche (figure 3.30).

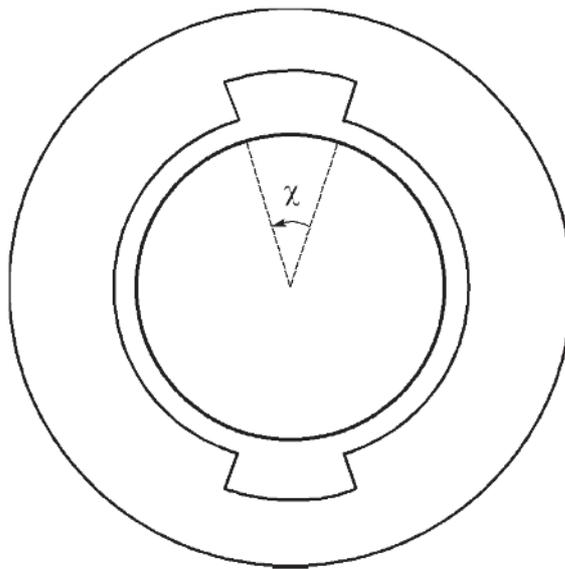


Figure 3.30 – Encoche de largeur non négligeable.

L'application du théorème d'Ampère montre que la variation de la tension magnétique engendrée par une bobine n'est plus rectangulaire, mais qu'elle devient trapézoïdale si l'on peut considérer que le courant est uniformément réparti sur toute la largeur de l'encoche (figure 3.31).

Cette distribution continue du courant peut se traiter comme pour la distribution des conducteurs dans plusieurs encoches en considérant que l'angle  $\varepsilon$  est infiniment petit et que le nombre d'encoches est infiniment grand dans l'angle total  $\chi = m\varepsilon$ . On peut alors reprendre l'expression des facteurs de distribution, mais en remplaçant

$\sin \frac{hp\varepsilon}{2}$  par son développement limité au premier ordre  $\frac{hp\varepsilon}{2}$ .

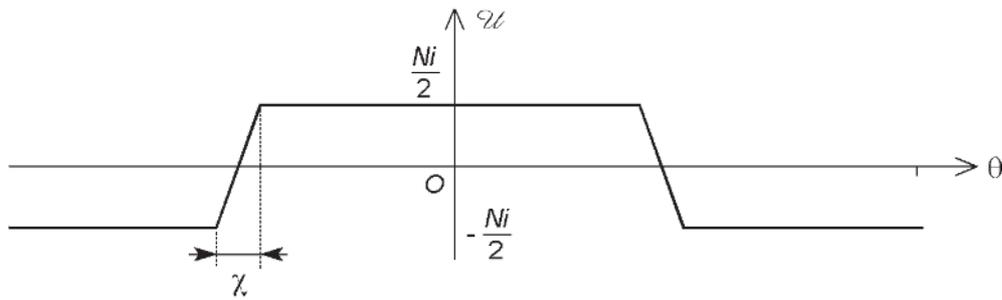


Figure 3.31 – Répartition de la tension magnétique créée par une bobine quand on tient compte de la largeur de l'encoche.

On obtient ainsi un facteur d'ouverture d'encoche  $K_{e1}$  pour le fondamental :

$$K_{e1} = \frac{\sin \frac{mp\varepsilon}{2}}{m \frac{p\varepsilon}{2}}$$

$$K_{e1} = \frac{\sin \frac{p\chi}{2}}{\frac{p\chi}{2}}$$

De la même façon, on calcule un facteur d'ouverture d'encoche  $K_{eb}$  pour l'harmonique de rang  $b$  :

$$K_{eb} = \frac{\sin \frac{hmp\varepsilon}{2}}{m \frac{hp\varepsilon}{2}}$$

$$K_{eb} = \frac{\sin \frac{hp\chi}{2}}{\frac{hp\chi}{2}}$$

### 3.2.9 Influence de l'inclinaison des encoches

Pour réduire les harmoniques de denture dans certaines machines synchrones à pôles saillants, on incline les encoches ou les arêtes des pièces polaires. Les cages d'écurieil des moteurs asynchrones ont également souvent leurs barres inclinées.

L'inclinaison est chiffrée par un angle  $\gamma$  (figure 3.32).

Le facteur d'inclinaison est égal au facteur de distribution d'une couche continue occupant l'angle  $\gamma$ .

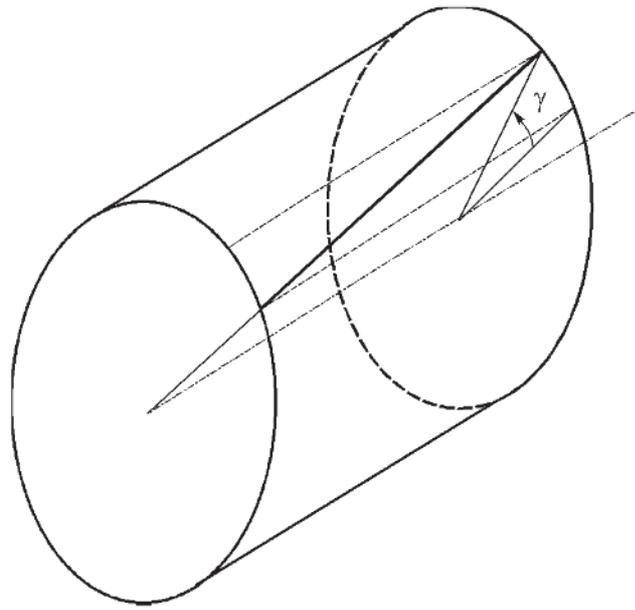


Figure 3.32 – Angle d'inclinaison.

Ainsi, le facteur d'inclinaison pour le fondamental est donné par la formule :

$$K_{i1} = \frac{\sin \frac{p\gamma}{2}}{\frac{p\gamma}{2}}$$

Le facteur d'inclinaison pour l'harmonique de rang  $h$  s'exprime par :

$$K_{ih} = \frac{\sin \frac{hp\gamma}{2}}{\frac{hp\gamma}{2}}$$

Un harmonique de rang  $h = 2k + 1$  peut être éliminé en annulant  $K_{ih}$ , donc en choisissant un angle  $\gamma$  tel que :

$$\sin \left[ (2k + 1) \frac{p\gamma}{2} \right] = 0$$

soit :

$$(2k + 1) \frac{p\gamma}{2} = n\pi \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}^*$$

La plus petite valeur de l'angle  $\gamma$  est obtenue pour  $n = 1$  :

$$\gamma = \frac{2\pi}{(2k + 1)p}$$

### 3.2.10 Facteur de bobinage

De manière générale, la diminution du fondamental de la tension magnétique par rapport au cas idéal de l'enroulement massé est due à la fois au facteur de distribution  $K_{d1}$ , au facteur de raccourcissement  $K_{r1}$ , au facteur d'ouverture d'encoche  $K_{e1}$  et au facteur d'inclinaison  $K_{i1}$ . On tient compte de l'ensemble de ces phénomènes en définissant le facteur de bobinage pour le fondamental  $K_{b1}$  :

$$K_{b1} = K_{d1} K_{r1} K_{e1} K_{i1}$$

De la même manière, on définit un facteur de bobinage  $K_{bh}$  pour l'harmonique de rang  $h$  ( $h$  impair) :

$$K_{bh} = K_{dh} K_{rh} K_{eh} K_{ih}$$

La tension magnétique d'entrefer s'écrit alors :

$$u = \frac{2}{\pi} Ni \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} K_{b2k+1} \cos[(2k+1)p\theta]$$

## 3.3 Tension magnétique tournante

### 3.3.1 Tension magnétique tournante créée par une roue polaire

#### ■ Tension magnétique tournante bipolaire

Considérons une machine dont le rotor comporte une paire de pôles, c'est-à-dire un pôle nord et un pôle sud (*figure 3.33*). Ces pôles peuvent être créés soit par des aimants permanents, soit par des bobinages parcourus par un courant continu.

Repérons un point de l'entrefer par un angle  $\theta$  (*figure 3.34*).

Lorsque la roue polaire est immobile, la tension magnétique d'entrefer est une fonction périodique de l'angle  $\theta$  dont la période est  $2\pi$ . Supposons que l'usinage des pôles soit tel que la variation de la tension magnétique le long de l'entrefer soit sinusoïdale (*figure 3.35*).

Si l'origine des angles est choisie sur l'axe du pôle nord, la fonction est de la forme :

$$u = u_M \cos\theta$$

Déplaçons maintenant l'axe du pôle nord d'un angle  $\alpha$  (*figure 3.36*). La tension magnétique au point repéré par l'angle  $\theta$  devient :

$$u = u_M \cos(\theta - \alpha)$$

Si la roue polaire tourne à la vitesse constante  $\omega_m$ , la répartition de la tension magnétique se déplace à la même vitesse et l'angle  $\alpha$  est une fonction affine du temps.

Copyright © 2005 Dunod. Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite à l'exception des cas prévus aux termes de l'article L.122-5, 2° et 3° a) du Code de la Propriété Intellectuelle.

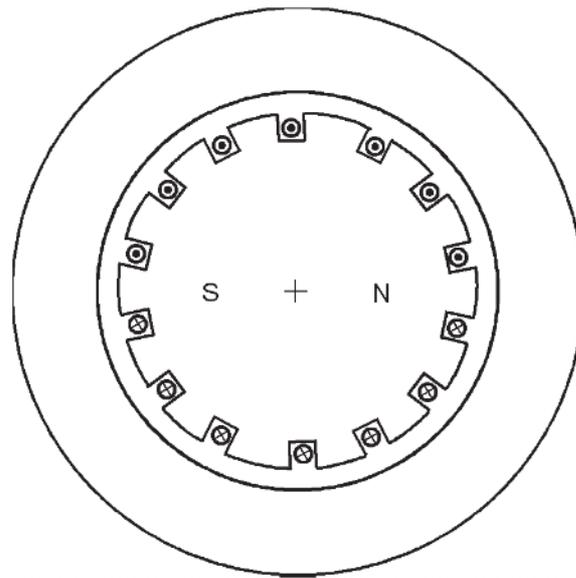


Figure 3.33 – Rotor bipolaire.

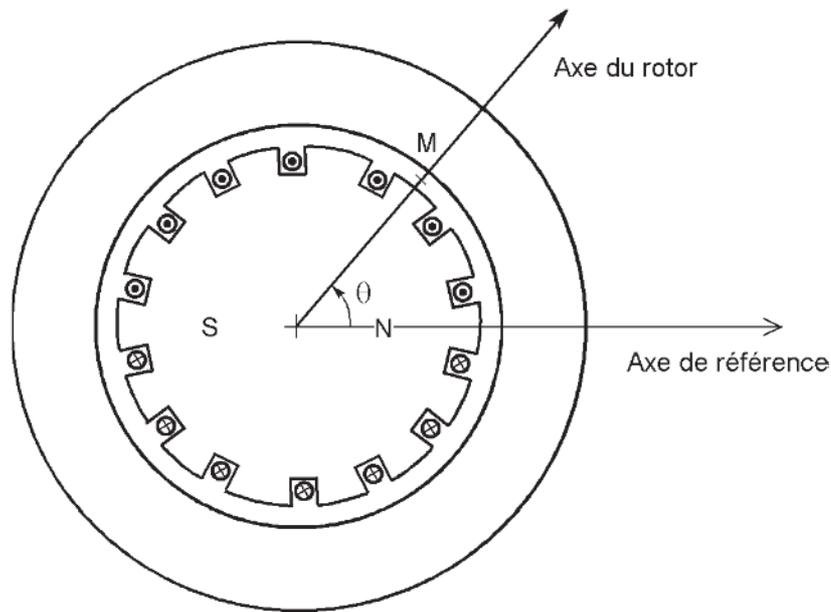


Figure 3.34 – Repérage d'un point de l'entrefer.

En choisissant l'origine des temps au moment d'un passage du pôle nord sur l'axe de référence, nous avons :

$$\alpha = \omega_m t$$

L'expression de la tension magnétique à l'instant  $t$ , au point de l'entrefer repéré par l'angle  $\theta$  est ainsi :

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_M \cos(\theta - \omega_m t)$$

ou, puisque cosinus est une fonction paire :

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_M \cos(\omega_m t - \theta)$$

C'est l'expression d'une tension magnétique tournante bipolaire.

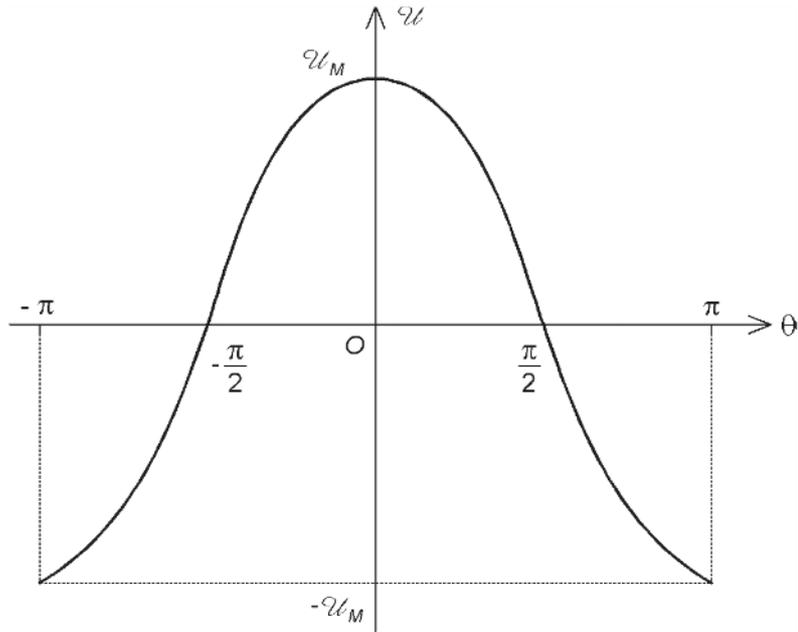


Figure 3.35 – Variation de la tension magnétique bipolaire le long de l'entrefer.

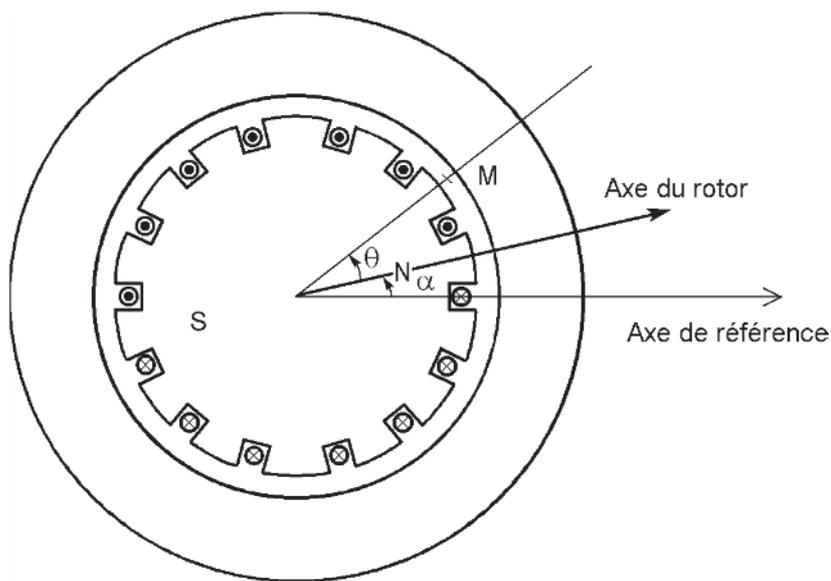


Figure 3.36 – Rotor dans une position différente.

### ■ Tension magnétique tournante multipolaire

Considérons une machine dont le rotor comporte  $p$  paires de pôles (*figure 3.37*).

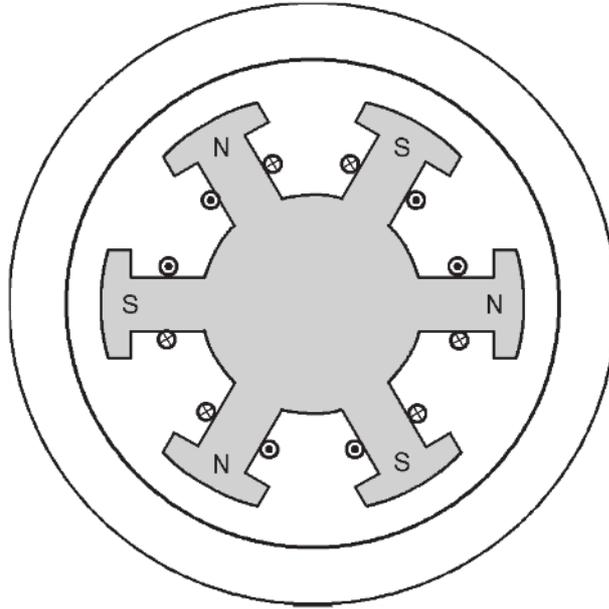


Figure 3.37 – Rotor multipolaire.

Quand le rotor est immobile, la tension magnétique d'entrefer est une fonction périodique de l'angle  $\theta$  de période  $\frac{2\pi}{p}$  (décalage angulaire entre deux pôles de même nom). Supposons encore que la variation est sinusoïdale (*figure 3.38*).

Si l'origine des angles est choisie sur l'axe d'un pôle nord, la fonction s'écrit :

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_M \cos p\theta$$

Si l'axe du pôle nord considéré fait un angle  $\alpha$  avec l'axe de référence, la fonction devient :

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_M \cos p(\theta - \alpha)$$

Quand la roue polaire tourne à la vitesse constante  $\omega_m$ , l'expression de la tension magnétique à l'instant  $t$ , au point de l'entrefer repéré par l'angle  $\theta$  est :

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_M \cos p(\theta - \omega_m t)$$

soit :

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_M \cos(p\omega_m t - p\theta)$$

Cette expression est celle d'une tension magnétique tournante à  $p$  paires de pôles.

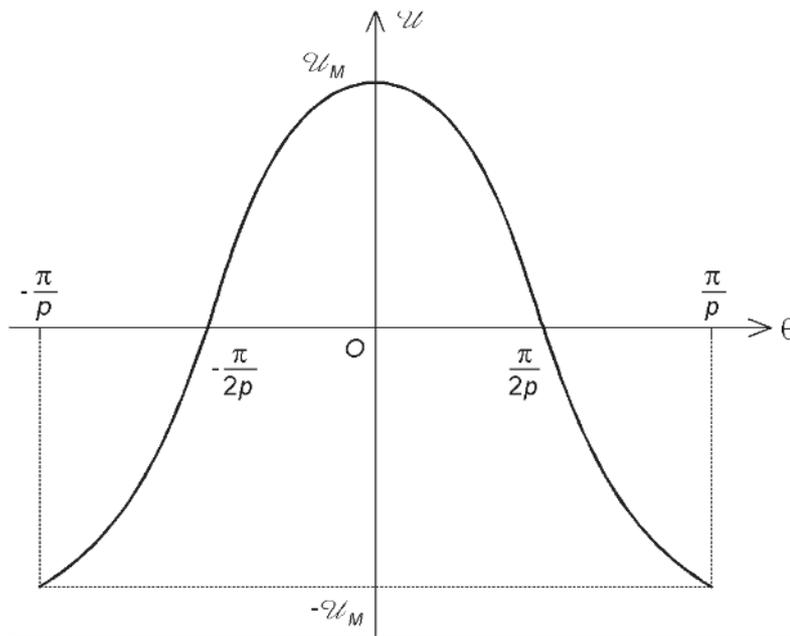


Figure 3.38 – Variation de la tension magnétique multipolaire le long de l'entrefer.

Pour nous ramener à une formulation similaire à celle d'une tension magnétique tournante bipolaire, faisons apparaître l'angle électrique  $\theta_e$  et la vitesse électrique  $\omega_e$  du rotor :

$$\theta_e = p\theta$$

$$\omega_e = p\omega_m$$

Nous obtenons ainsi :

$$u = u_M \cos(\omega_e t - \theta_e)$$

### ■ Représentation vectorielle

La tension magnétique tournante peut être représentée dans le plan électrique par un vecteur  $\mathcal{U}$  d'amplitude  $u_M$  tournant à la vitesse  $\omega_e$  : c'est le vecteur d'espace de la tension magnétique tournante (figure 3.39). Ce vecteur est porté par l'axe de la roue polaire (axe de l'enroulement ou de l'aimant) et orienté dans le sens sud-nord.

La tension magnétique tournante en un point de l'entrefer repéré par l'angle  $\theta$  est la mesure algébrique de la projection du vecteur  $\mathcal{U}$  sur l'axe faisant l'angle  $\theta_e$  par rapport à l'axe de référence dans le plan électrique. Le vecteur d'espace indique en permanence un endroit où l'entrefer est soumis à une tension magnétique maximale.

### 3.3.2 Tension magnétique tournante créée par un enroulement polyphasé

Dans les moteurs alternatifs, un champ tournant est créé par un enroulement polyphasé, la plupart du temps triphasé.

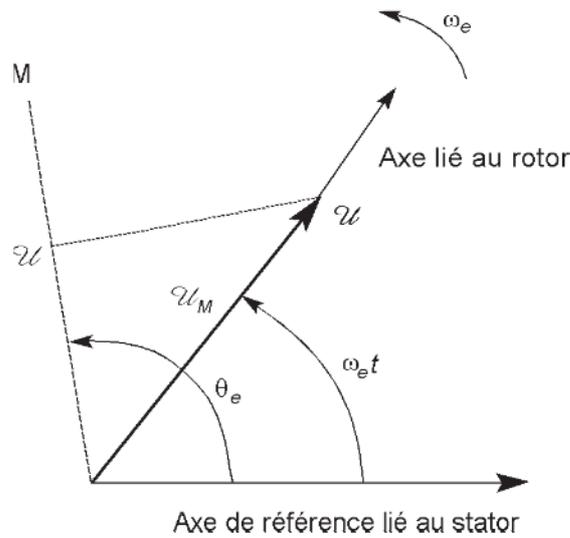


Figure 3.39 – Vecteur d'espace de la tension magnétique tournante.

■ Tension magnétique tournante créée par un enroulement diphasé

Il existe quelques moteurs diphasés, mais ce cas reste exceptionnel. L'importance du diphasé vient du fait que la commande des moteurs triphasés fait de plus en plus souvent appel à une transformation mathématique des grandeurs triphasées en grandeurs diphasées (transformation de Park).

Un enroulement diphasé à  $p$  paires de pôles est constitué de bobines dont les axes sont décalés de  $\frac{\pi}{2p}$ . La représentation bipolaire comprend donc deux bobines dont les axes forment un angle de  $\frac{\pi}{2}$  (figure 3.40).

Od est l'axe direct et Oq l'axe en quadrature.

La tension magnétique  $u_d$  créée par la phase d, parcourue par un courant  $i_d$ , en un point de l'entrefer repéré par l'angle  $\theta$  est :

$$u_d = k i_d \cos p \theta$$

La tension magnétique  $u_q$  créée par la phase q, parcourue par un courant  $i_q$ , est, au même point :

$$u_q = k i_q \cos \left( p \theta - \frac{\pi}{2} \right) = k i_q \sin p \theta$$

En régime sinusoïdal permanent, les courants  $i_d$  et  $i_q$  dans les bobines d et q ont même amplitude  $I_M$ , même pulsation  $\omega$  et sont en quadrature :

$$i_d = I_M \cos \omega t$$

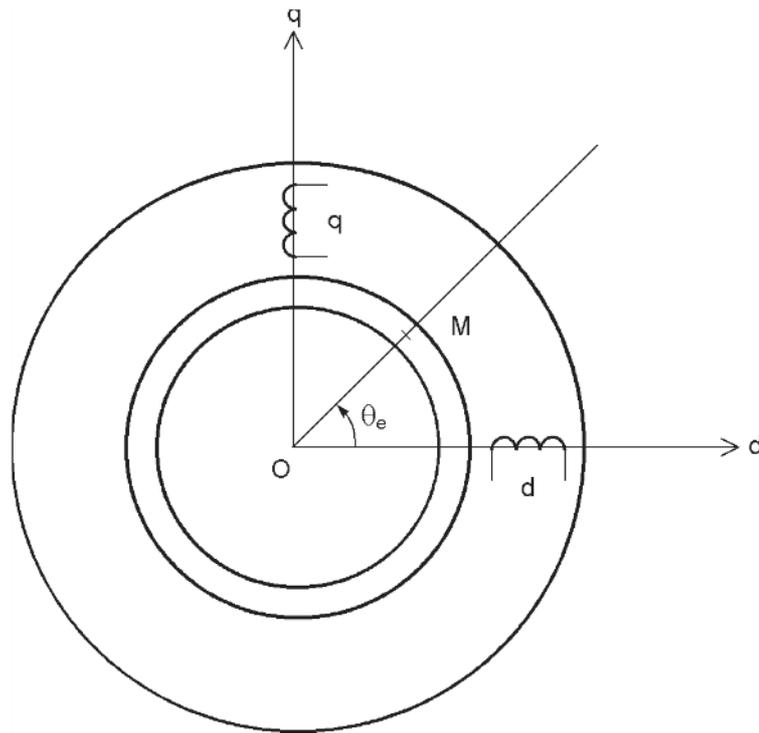


Figure 3.40 – Représentation bipolaire d'un enroulement diphasé.

$$i_q = I_M \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = I_M \sin \omega t$$

Remarquons bien que le système diphasé est un cas particulier : ce n'est pas le système polyphasé équilibré à deux phases.

La tension magnétique résultante  $\mathcal{U}$  s'écrit alors :

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_d + \mathcal{U}_q$$

$$\mathcal{U} = kI_M \cos \omega t \cos p\theta + kI_M \sin \omega t \sin p\theta$$

Transformons les produits de fonctions sinusoïdales en sommes grâce aux formules :

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$$

Cela donne :

$$\begin{aligned} \mathcal{U} = & \frac{1}{2} kI_M [\cos(\omega t + p\theta) + \cos(\omega t - p\theta)] \\ & + \frac{1}{2} kI_M [\cos(\omega t - p\theta) - \cos(\omega t + p\theta)] \end{aligned}$$

L'expression se simplifie :

$$\mathcal{U} = kI_M \cos(\omega t - p\theta)$$

C'est une tension magnétique tournante à  $p$  paires de pôles d'amplitude  $kI_M$  et de vitesse de rotation  $\frac{\omega}{p}$ .

#### ■ Tension magnétique tournante créée par un enroulement triphasé

La représentation bipolaire comporte trois bobines dont les axes forment un angle de  $\frac{2\pi}{3}$  (figure 3.41).

Les tensions magnétiques créées par les phases a, b et c, parcourue par des courants  $i_a$ ,  $i_b$  et  $i_c$  sont respectivement, en un point M de l'entrefer repéré par l'angle  $\theta$  :

$$\mathcal{U}_a = ki_a \cos p\theta$$

$$\mathcal{U}_b = ki_b \cos\left(p\theta - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\mathcal{U}_c = ki_c \cos\left(p\theta + \frac{2\pi}{3}\right)$$

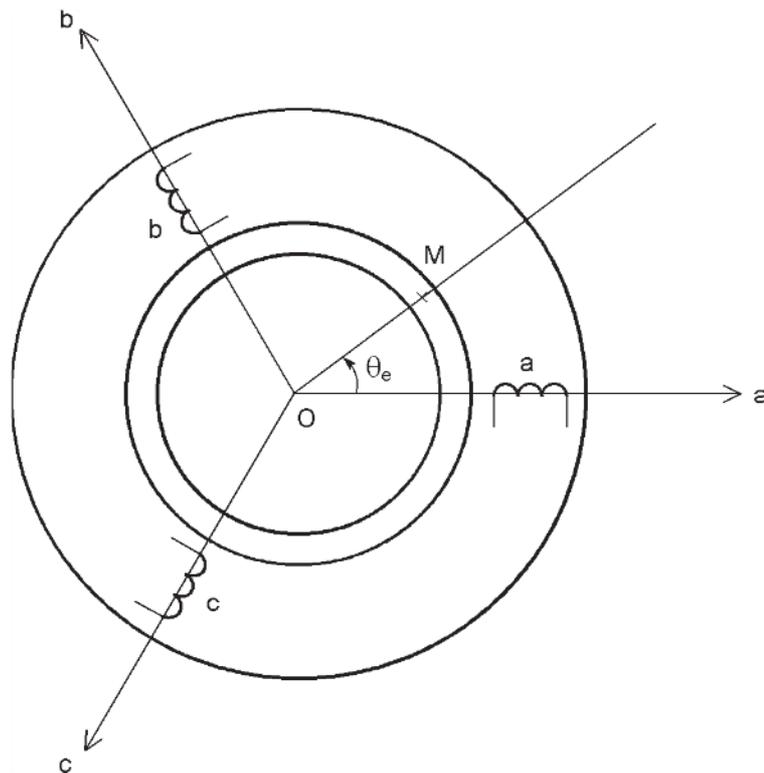


Figure 3.41 – Représentation bipolaire d'un enroulement triphasé.

Les trois phases sont parcourues par des courants formant un système triphasé équilibré direct :

$$i_a = I_M \cos \omega t$$

$$i_b = I_M \cos \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$i_c = I_M \cos \left( \omega t + \frac{2\pi}{3} \right)$$

Cela conduit à :

$$\mathcal{U}_a = kI_M \cos \omega t \cos p\theta$$

$$\mathcal{U}_b = kI_M \cos \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} \right) \cos \left( p\theta - \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$\mathcal{U}_c = kI_M \cos \left( \omega t + \frac{2\pi}{3} \right) \cos \left( p\theta + \frac{2\pi}{3} \right)$$

Remplaçons les produits de cosinus par des sommes :

$$\mathcal{U}_a = \frac{1}{2} kI_M [\cos(\omega t + p\theta) + \cos(\omega t - p\theta)]$$

$$\mathcal{U}_b = \frac{1}{2} kI_M \left[ \cos \left( \omega t + p\theta - \frac{4\pi}{3} \right) + \cos(\omega t - p\theta) \right]$$

$$\mathcal{U}_c = \frac{1}{2} kI_M \left[ \cos \left( \omega t + p\theta + \frac{4\pi}{3} \right) + \cos(\omega t - p\theta) \right]$$

La tension magnétique résultante est :

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_a + \mathcal{U}_b + \mathcal{U}_c$$

La somme des premiers termes des trois expressions est nulle tandis que les seconds termes sont les mêmes :

$$\mathcal{U} = \frac{3}{2} kI_M \cos(\omega t - p\theta)$$

C'est une tension magnétique tournante à  $p$  paires de pôles, d'amplitude  $\frac{3}{2} kI_M$  et de vitesse de rotation  $\frac{\omega}{p}$ .

### ■ Tension magnétique tournante créée par un enroulement polyphasé quelconque

Le résultat se généralise à un enroulement polyphasé parcouru par un système polyphasé équilibré de courants sinusoïdaux. Pour un nombre  $q$  de phases, la tension magnétique tournante est, pour un système direct :

$$\mathcal{U} = \frac{q}{2} k I_M \cos(\omega t - p \theta)$$

### ■ Théorème de Ferraris

Un enroulement polyphasé de constitution symétrique, à  $p$  paires de pôles, dont chacune des  $q$  phases crée une tension magnétique à répartition sinusoïdale, parcouru par un système polyphasé équilibré de  $q$  courants sinusoïdaux, produit dans l'entrefer une tension magnétique tournante à  $p$  paires de pôles, d'amplitude  $\frac{q}{2} k I_M$  et de vitesse de rotation  $\frac{\omega}{p}$ .

### ■ Représentation vectorielle

La tension magnétique tournante peut encore être représentée dans le plan électrique par un vecteur tournant  $\mathcal{U}$ . Son amplitude est  $\mathcal{U}_M = \frac{3}{2} k I_M$  et sa vitesse de rotation est  $\omega$ . Ce vecteur ne correspond plus à un axe d'enroulement comme pour la roue polaire, mais il indique toujours un endroit où l'entrefer est soumis à une tension magnétique maximale (figure 3.42).

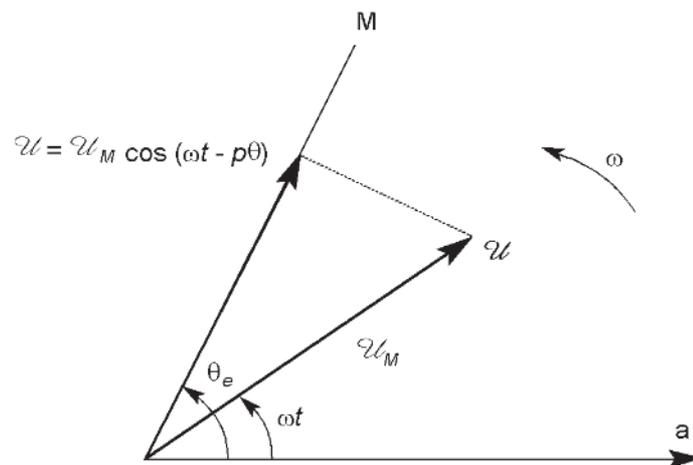


Figure 3.42 – Vecteur d'espace de la tension magnétique tournante.

La tension magnétique tournante en un point de l'entrefer repéré par l'angle  $\theta$  est la mesure algébrique de la projection du vecteur  $\mathcal{U}$  sur l'axe faisant l'angle  $\theta_e$  par rapport à l'axe de référence dans le plan électrique.

### ■ Décomposition en vecteurs associés à chaque phase d'un enroulement triphasé

Lorsque la tension magnétique tournante est créée par un enroulement triphasé parcouru par un système triphasé équilibré direct de courants, d'amplitude  $I_M$  et de pulsation  $\omega$ , elle s'exprime par :

$$\mathcal{U} = \frac{3}{2} k I_M \cos(\omega t - p\theta)$$

Les tensions magnétiques  $\mathcal{U}_a$ ,  $\mathcal{U}_b$  et  $\mathcal{U}_c$ , créées respectivement par les phases a, b et c, sont :

$$\mathcal{U}_a = k i_a \cos p\theta$$

$$\mathcal{U}_b = k i_b \cos\left(p\theta - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\mathcal{U}_c = k i_c \cos\left(p\theta + \frac{2\pi}{3}\right)$$

Il est possible d'associer des vecteurs  $\mathcal{U}_a$ ,  $\mathcal{U}_b$  et  $\mathcal{U}_c$  à ces trois fonctions sinusoïdales de la variable  $p\theta$ . La direction de chaque vecteur est l'axe de la phase considérée. Les mesures algébriques des trois vecteurs sont respectivement  $k i_a$ ,  $k i_b$  et  $k i_c$ . Les expressions des tensions magnétiques sont toujours obtenues par projection des vecteurs correspondants sur l'axe repéré par l'angle  $p\theta$ . Le vecteur d'espace de la tension magnétique résultante est la somme des trois vecteurs associés aux trois phases :

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_a + \mathcal{U}_b + \mathcal{U}_c$$

Illustrons cette propriété en représentant le diagramme vectoriel à des instants particuliers. Les intensités des courants dans les phases sont :

$$i_a = I_M \cos \omega t$$

$$i_b = I_M \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$i_c = I_M \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

À l'instant  $t = 0$ , les valeurs de ces intensités sont :

$$i_a = I_M$$

$$i_b = -\frac{1}{2} I_M$$

$$i_c = -\frac{1}{2} I_M$$

Les tensions magnétiques d'entrefer créées par ces trois courants sont :

$$\mathcal{U}_a = kI_M$$

$$\mathcal{U}_b = -\frac{1}{2}kI_M$$

$$\mathcal{U}_c = -\frac{1}{2}kI_M$$

Le diagramme vectoriel (*figure 3.43*) montre bien que la tension magnétique résultante représentée par un vecteur dont la direction est celle de l'axe de référence et dont la norme est  $\frac{3}{2}kI_M$  comme nous le montre le théorème de Ferraris.

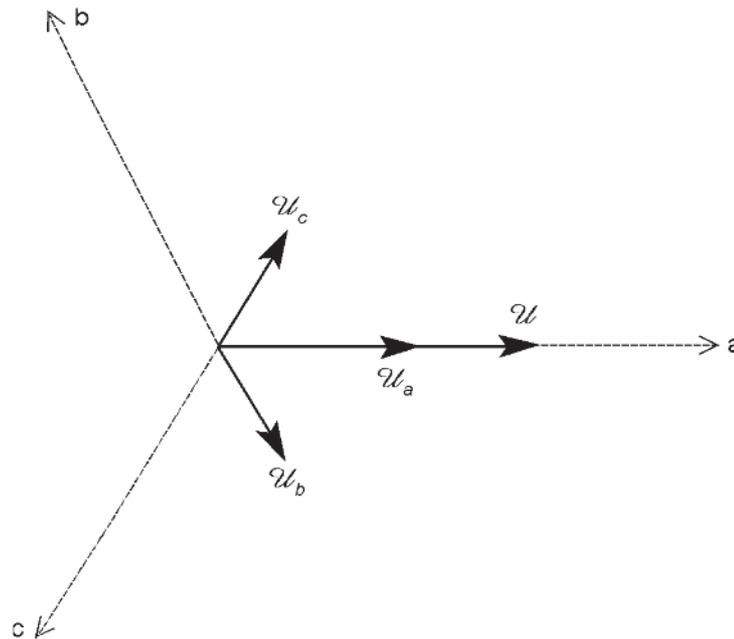


Figure 3.43 – Position du vecteur d'espace de la tension magnétique à  $t = 0$ .

Reprenons la même démarche à l'instant  $t = \frac{\pi}{3\omega}$  où les courants valent :

$$i_a = \frac{1}{2}I_M$$

$$i_b = \frac{1}{2}I_M$$

$$i_c = -I_M$$

Le diagramme vectoriel (*figure 3.44*) montre que le vecteur d'espace a toujours même norme, mais que sa direction a tourné d'un angle  $\frac{\pi}{3}$ .

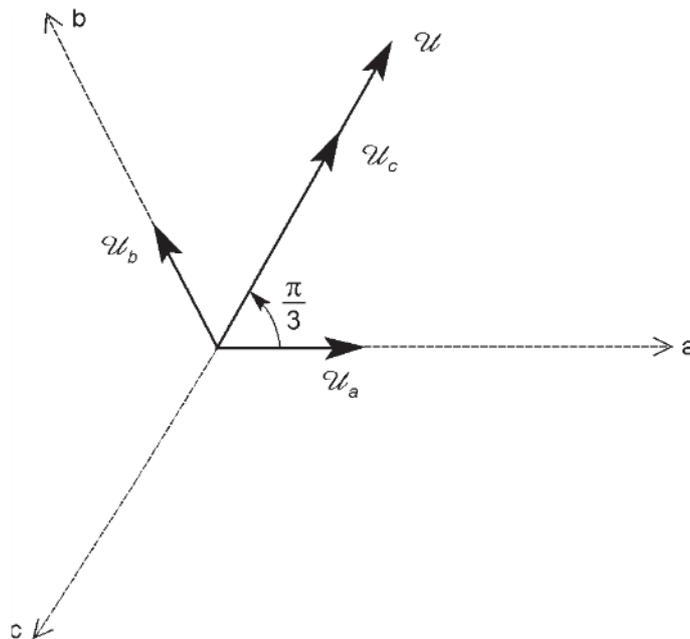


Figure 3.44 – Position du vecteur d'espace de la tension magnétique à  $t = \frac{\pi}{3\omega}$ .

### ■ Influence du déséquilibre des courants

#### □ Décomposition en composantes symétriques

Si le système triphasé des courants est déséquilibré, nous pouvons le décomposer en composantes symétriques de Fortescue, c'est-à-dire le considérer comme la somme d'un système équilibré direct, d'un système équilibré inverse et d'un système homopolaire :

$$i_1 = I_{dM} \cos(\omega t - \varphi_d) + I_{iM} \cos(\omega t - \varphi_i) + I_{hM} \cos(\omega t - \varphi_h)$$

$$i_2 = I_{dM} \cos\left(\omega t - \varphi_d - \frac{2\pi}{3}\right) + I_{iM} \cos\left(\omega t - \varphi_i + \frac{2\pi}{3}\right) + I_{hM} \cos(\omega t - \varphi_h)$$

$$i_3 = I_{dM} \cos\left(\omega t - \varphi_d + \frac{2\pi}{3}\right) + I_{iM} \cos\left(\omega t - \varphi_i - \frac{2\pi}{3}\right) + I_{hM} \cos(\omega t - \varphi_h)$$

Comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, le système direct engendre une tension magnétique tournante dans le sens direct :

$$\mathcal{U}_d = \frac{3}{2} k I_{dM} \cos(\omega t - \varphi_d - p\theta) = \mathcal{U}_{dM} \cos(\omega t - \varphi_d - p\theta)$$

Le système inverse crée une tension magnétique tournante dans le sens inverse :

$$\mathcal{U}_i = \frac{3}{2} k I_{iM} \cos(\omega t - \varphi_i + p\theta) = \mathcal{U}_{iM} \cos(\omega t - \varphi_i + p\theta)$$

Enfin, le système homopolaire ne crée pas de tension magnétique puisque :

$$\mathcal{U}_h = k I_{hM} \cos(\omega t - \varphi_h) \left[ \cos p\theta + \cos\left(p\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(p\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \right] = 0$$

La tension magnétique résultante est la somme de la tension magnétique tournante dans le sens direct et de la tension magnétique tournante dans le sens inverse :

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_d + \mathcal{U}_i$$

□ **Diagramme spatial**

Les tensions magnétiques tournantes  $\mathcal{U}_d$  et  $\mathcal{U}_i$  peuvent être représentées par des vecteurs d'espace  $\mathcal{U}_d$  et  $\mathcal{U}_i$  qui tournent en sens inverse l'un de l'autre (figure 3.45). Leur somme donne le vecteur d'espace de la tension magnétique résultante :

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_d + \mathcal{U}_i$$

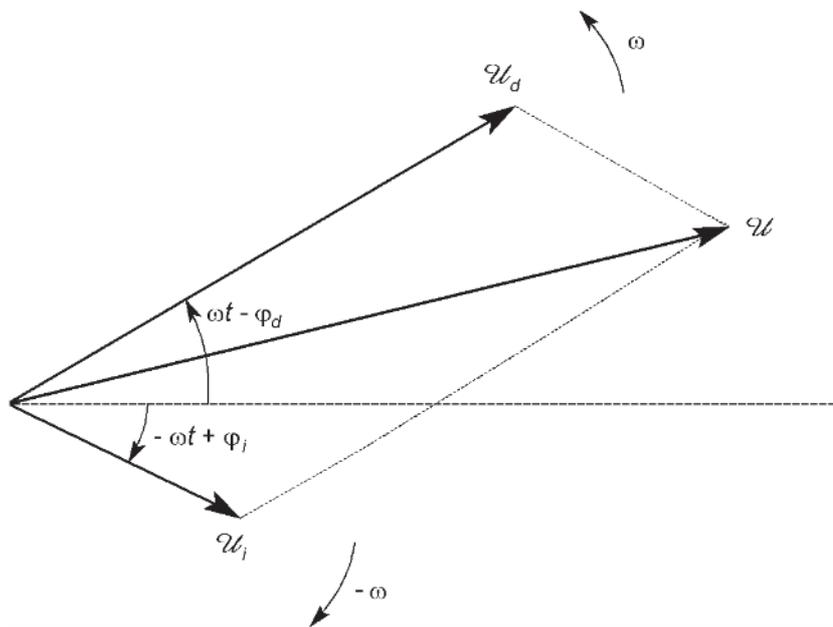


Figure 3.45 – Composition des vecteurs d'espace.

L'extrémité du vecteur résultant  $\mathcal{U}$  décrit une ellipse. Pour le montrer, considérons un repère  $Oxy$  tel que l'axe  $Ox$  est dans la direction de  $\mathcal{U}_d$  lorsque  $\mathcal{U}_d$  et  $\mathcal{U}_i$  sont colinéaires et de même sens et que l'axe  $Oy$  est dans la direction de  $\mathcal{U}_d$  lorsque  $\mathcal{U}_d$  et  $\mathcal{U}_i$  sont colinéaires et de sens contraire (figure 3.46).

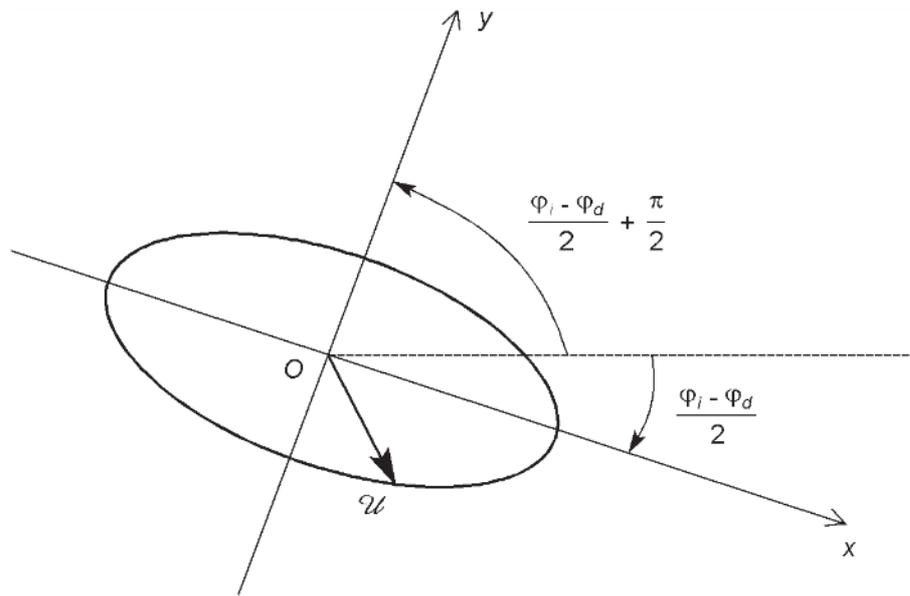


Figure 3.46 – Ellipse décrite par l'extrémité du vecteur d'espace.

La position  $p\theta_1$  de l'axe  $Ox$  est telle que :

$$\omega t_1 - \varphi_i + p\theta_1 = \omega t_1 - \varphi_d - p\theta_1$$

d'où :

$$p\theta_1 = \frac{\varphi_i - \varphi_d}{2}$$

La position  $p\theta_2$  de l'axe  $Oy$  est telle que :

$$\omega t_2 - \varphi_i + p\theta_2 = \omega t_2 - \varphi_d - p\theta_2 + \pi$$

d'où :

$$p\theta_2 = \frac{\varphi_i - \varphi_d}{2} + \frac{\pi}{2}$$

Le repère  $Oxy$  est donc orthogonal.

Les coordonnées  $x$  et  $y$  de l'extrémité du vecteur  $\mathcal{U}$  sont obtenues en remplaçant  $\theta$  successivement par  $\theta_1$  et  $\theta_2$  dans les expressions de  $\mathcal{U}_d$  et  $\mathcal{U}_i$  et en faisant ensuite la somme de ces deux composantes :

$$x = \mathcal{U}_{dM} \cos(\omega t - \varphi_d - p\theta_1) + \mathcal{U}_{iM} \cos(\omega t - \varphi_i + p\theta_1)$$

$$y = \mathcal{U}_{dM} \cos(\omega t - \varphi_d - p\theta_2) + \mathcal{U}_{iM} \cos(\omega t - \varphi_i + p\theta_2)$$

$$\begin{aligned}
 x &= \mathcal{U}_{dM} \cos\left(\omega t - \frac{\varphi_i + \varphi_d}{2}\right) + \mathcal{U}_{iM} \cos\left(\omega t - \frac{\varphi_i + \varphi_d}{2}\right) \\
 y &= \mathcal{U}_{dM} \cos\left(\omega t - \frac{\varphi_i + \varphi_d}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + \mathcal{U}_{iM} \cos\left(\omega t - \frac{\varphi_i + \varphi_d}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \\
 x &= (\mathcal{U}_{dM} + \mathcal{U}_{iM}) \cos\left(\omega t - \frac{\varphi_i + \varphi_d}{2}\right) \\
 y &= (\mathcal{U}_{dM} - \mathcal{U}_{iM}) \sin\left(\omega t - \frac{\varphi_i + \varphi_d}{2}\right) \\
 \frac{x^2}{(\mathcal{U}_{dM} + \mathcal{U}_{iM})^2} + \frac{y^2}{(\mathcal{U}_{dM} - \mathcal{U}_{iM})^2} &= 1
 \end{aligned}$$

C'est bien l'équation d'une ellipse de demi-grand axe  $\mathcal{U}_{dM} + \mathcal{U}_{iM}$  et de demi-petit axe  $\mathcal{U}_{dM} - \mathcal{U}_{iM}$ . On dit que la tension magnétique tournante est elliptique.

#### ■ Tension magnétique tournante à répartition non sinusoïdale créée par des courants sinusoïdaux

Considérons un enroulement triphasé parcouru par des courants sinusoïdaux formant un système triphasé équilibré. Compte tenu du nombre fini d'encoches, la répartition des conducteurs n'est jamais parfaitement sinusoïdale.

En raison de la symétrie de chaque phase, le développement en série de Fourier de la tension magnétique créée à un instant donné ne comporte pas d'harmoniques de rang pair (symétrie de glissement) : il n'apparaît donc que des composantes de rang impair,  $h = 2k + 1$ . Les tensions magnétiques dues à chacune des trois phases s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{U}_1 &= I_M \cos \omega t \sum_{k=0}^{+\infty} A_{2k+1} \cos(2k+1) p \theta \\
 \mathcal{U}_2 &= I_M \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \sum_{k=0}^{+\infty} A_{2k+1} \cos\left[(2k+1)\left(p\theta - \frac{2\pi}{3}\right)\right] \\
 \mathcal{U}_3 &= I_M \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \sum_{k=0}^{+\infty} A_{2k+1} \cos\left[(2k+1)\left(p\theta + \frac{2\pi}{3}\right)\right]
 \end{aligned}$$

La tension magnétique résultante est la somme des tensions magnétiques de chaque phase :

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \mathcal{U}_3$$

Il reste à effectuer l'addition et à remplacer tous les produits de cosinus par des sommes en utilisant la relation trigonométrique :

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)]$$

$$\begin{aligned} u &= \frac{3}{2} A_1 I_M \cos(\omega t - p\theta) + \frac{3}{2} A_5 I_M \cos(\omega t + 5p\theta) \\ &+ \frac{3}{2} A_7 I_M \cos(\omega t - 7p\theta) + \dots \end{aligned}$$

Les composantes de rang impair tel que  $h = 3j + 1$  ( $j \in \mathbb{N}$ ) c'est-à-dire  $h = 6l + 1$  ( $l \in \mathbb{N}$ ), donnent naissance à des tensions magnétiques tournantes directes, de vitesse angulaire  $\frac{\omega}{hp}$ .

Les composantes de rang impair tel que  $h = 3j - 1$  ( $j \in \mathbb{N}^*$ ) c'est-à-dire  $h = 6l - 1$  ( $l \in \mathbb{N}^*$ ) donnent naissance à des tensions magnétiques tournantes inverses, de vitesse angulaire  $-\frac{\omega}{hp}$ .

Les composantes de rang  $h = 3j$  ( $j \in \mathbb{N}^*$ ) n'engendrent pas de tension magnétique. Le *tableau 3.1* précise les vitesses angulaires des premières tensions magnétiques tournantes obtenues.

**Tableau 3.1** – Vitesse angulaire des tensions magnétiques tournantes.

<b>h</b>	1	5	7	11	13	17	19
<b>Ω</b>	$\frac{\omega}{p}$	$-\frac{\omega}{5p}$	$\frac{\omega}{7p}$	$-\frac{\omega}{11p}$	$\frac{\omega}{13p}$	$-\frac{\omega}{17p}$	$\frac{\omega}{19p}$

■ **Tension magnétique tournante à répartition sinusoïdale créée par des courants non sinusoïdaux**

Les courants dans l'enroulement sont souvent fournis par une alimentation électronique : ils ne sont alors pas parfaitement sinusoïdaux, mais ils restent périodiques et donc décomposables en série de Fourier :

$$\begin{aligned} i_1 &= \sum_{n=1}^{+\infty} I_{nM} \cos(n\omega t + \psi_n) \\ i_2 &= \sum_{n=1}^{+\infty} I_{nM} \cos\left(n\omega t + \psi_n - \frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

$$i_3 = \sum_{n=1}^{+\infty} I_{nM} \cos\left(n\omega t + \psi_n + \frac{2\pi}{3}\right)$$

Considérons d'abord que la répartition des tensions magnétiques est sinusoïdale. Les tensions magnétiques créées par chacune des trois phases sont donc :

$$\mathcal{U}_1 = k \cos p\theta \sum_{n=1}^{+\infty} I_{nM} \cos(n\omega t + \psi_n)$$

$$\mathcal{U}_2 = k \cos\left(p\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \sum_{n=1}^{+\infty} I_{nM} \cos\left(n\omega t + \psi_n - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\mathcal{U}_3 = k \cos\left(p\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \sum_{n=1}^{+\infty} I_{nM} \cos\left(n\omega t + \psi_n + \frac{2\pi}{3}\right)$$

La tension magnétique résultante est la somme des tensions magnétiques de chaque phase :

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \mathcal{U}_3$$

Il reste à effectuer l'opération et à transformer les produits de cosinus en sommes avec la même formule trigonométrique que dans le paragraphe précédent :

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \frac{3}{2} k I_{1M} \cos(\omega t + \psi_1 - p\theta) + \frac{3}{2} k I_{2M} \cos(2\omega t + \psi_2 + p\theta) \\ &+ \frac{3}{2} k I_{3M} \cos(3\omega t + \psi_3 - p\theta) + \dots \end{aligned}$$

Les composantes de rang  $n = 3j + 1$  ( $j \in \mathbb{N}$ ) donnent naissance à des tensions magnétiques tournantes directes à la vitesse  $\frac{n\omega}{p}$ .

Les composantes de rang  $n = 3j - 1$  ( $j \in \mathbb{N}^*$ ) donnent naissance à des tensions magnétiques tournantes inverses à la vitesse  $-\frac{n\omega}{p}$ .

Les composantes de rang  $n = 3j$  ( $j \in \mathbb{N}^*$ ) n'engendrent pas de tension magnétique. Le *tableau 3.2* précise les vitesses angulaires des premières tensions magnétiques tournantes obtenues.

**Tableau 3.2** – Vitesses angulaires des tensions magnétiques tournantes.

n	1	2	4	5	7	8	10	11
$\Omega$	$\frac{\omega}{p}$	$-\frac{2\omega}{p}$	$\frac{4\omega}{p}$	$-\frac{5\omega}{p}$	$\frac{7\omega}{p}$	$-\frac{8\omega}{p}$	$\frac{10\omega}{p}$	$-\frac{11\omega}{p}$

Les courants fournis par les convertisseurs électroniques présentant le plus souvent une symétrie de glissement, leur décomposition en série de Fourier ne comporte que des composantes de rang impair, ce qui élimine certains termes dans la tension magnétique tournante :

- les composantes de rang  $n = 6l + 1$  ( $l \in \mathbb{N}$ ) donnent naissance à des tensions magnétiques tournantes directes à la vitesse  $\frac{n\omega}{p}$  ;
- les composantes de rang  $n = 6l - 1$  ( $l \in \mathbb{N}^*$ ) donnent naissance à des tensions magnétiques tournantes inverses à la vitesse  $-\frac{n\omega}{p}$ .

#### ■ Tension magnétique tournante à répartition non sinusoïdale créée par des courants non sinusoïdaux

De manière générale, les courants ne sont pas parfaitement sinusoïdaux et la répartition des tensions magnétiques n'est pas exactement sinusoïdale. Les tensions magnétiques engendrées par chacune des trois phases sont alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1 &= \left[ \sum_{n=1}^{+\infty} I_{nM} \cos(n\omega t + \psi_n) \right] \sum_{k=0}^{+\infty} A_{2k+1} \cos(2k+1)p\theta \\ \mathcal{U}_2 &= \left[ \sum_{n=1}^{+\infty} I_{nM} \cos\left(n\omega t + \psi_n - \frac{2\pi}{3}\right) \right] \sum_{k=0}^{+\infty} A_{2k+1} \cos\left[(2k+1)\left(p\theta - \frac{2\pi}{3}\right)\right] \\ \mathcal{U}_3 &= \left[ \sum_{n=1}^{+\infty} I_{nM} \cos\left(n\omega t + \psi_n - \frac{4\pi}{3}\right) \right] \sum_{k=0}^{+\infty} A_{2k+1} \cos\left[(2k+1)\left(p\theta - \frac{4\pi}{3}\right)\right] \end{aligned}$$

La tension magnétique résultante est la somme des tensions magnétiques de chaque phase :

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \mathcal{U}_3$$

Il reste à effectuer l'opération et à transformer les produits de cosinus en sommes avec la même formule trigonométrique que dans les paragraphes précédents.

Les termes tels que  $n = 3j + h$  ( $j \in \mathbb{N}$ ) donnent des tensions magnétiques tournantes directes, de vitesse angulaire  $\frac{n\omega}{hp}$ .

Les termes tels que  $n = 3j - h$  ( $j \in \mathbb{N}^*$ ) donnent des tensions magnétiques tournantes inverses, de vitesse angulaire  $-\frac{n\omega}{hp}$ .

Les termes pour lesquels les harmoniques de courant et d'espace ont même rang ( $n = h$ ) donnent des tensions magnétiques tournantes à la même vitesse  $\frac{\omega}{p}$  que la tension magnétique fondamentale.

Les termes pour lesquels  $n = 3j + h$  ( $j \in \mathbb{N}$ ) et  $n = 3j' - h$  ( $j' \in \mathbb{N}^*$ ) donnent des tensions magnétiques fixes.

Les autres combinaisons d'harmoniques ne créent pas de tension magnétique résultante.

## 4 • CONVERSION ÉLECTROMÉCANIQUE

Les différents types de moteurs électriques sont des applications des principes généraux de la conversion électromécanique que nous allons étudier dans ce chapitre.

### 4.1 Étude générale

#### 4.1.1 Description du système

De manière générale, un convertisseur électromécanique est un dispositif destiné à transformer l'énergie électrique en énergie mécanique par l'intermédiaire d'un champ magnétique. Il est formé d'un circuit magnétique comportant une partie fixe et une partie mobile (en rotation en ce qui nous concerne), sur lesquelles sont placés un ou plusieurs enroulements et éventuellement des aimants.

Le dispositif comporte  $M$  circuits électriques repérés par l'indice  $k$  (entier compris entre 1 et  $M$ ). Pour le circuit numéro  $k$ , appelons respectivement  $R_k$  la résistance,  $v_k$  et  $i_k$  la tension et l'intensité en convention récepteur et  $\psi_k$  le flux totalisé avec une orientation en concordance avec le courant. Ces grandeurs sont liées par la relation :

$$v_k = R_k i_k + \frac{d\psi_k}{dt}$$

La position du rotor est repérée par l'angle  $\alpha$  et le moment du couple électromagnétique est noté  $\gamma$ .

#### 4.1.2 Énergie et coénergie

On peut établir les équations du système en étudiant les variations de l'énergie magnétique emmagasinée, ou celles de la coénergie. Procédons à un bilan énergétique. La variation élémentaire d'énergie magnétique pendant la durée  $dt$  est :

$$dW = \delta W_e - \delta W_j - \delta W_m$$

Dans cette égalité apparaissent :

- l'énergie électrique fournie par les sources :  $\delta W_e = \sum_{k=1}^M v_k i_k dt$  ;

- l'énergie perdue par effet Joule dans les bobines (chaleur) :  $\delta W_j = \sum_{k=1}^M R_k i_k^2 dt$  ;
- le travail mécanique produit :  $\delta W_m = \gamma d\alpha$ .

Nous pouvons ainsi écrire :

$$dW = \sum_{k=1}^M v_k i_k dt - \sum_{k=1}^M R_k i_k^2 dt - \gamma d\alpha$$

soit, en tenant compte de la relation qui existe entre les grandeurs électriques :

$$dW = \sum_{k=1}^M i_k d\psi_k - \gamma d\alpha$$

La coénergie  $W'$  est définie par :

$$W + W' = \sum_{k=1}^M \psi_k i_k$$

Sa différentielle  $dW'$  est obtenue en écrivant :

$$dW + dW' = d\left(\sum_{k=1}^M \psi_k i_k\right) = \sum_{k=1}^M \psi_k di_k + \sum_{k=1}^M i_k d\psi_k$$

ce qui conduit à :

$$dW' = \sum_{k=1}^M \psi_k di_k + \gamma d\alpha$$

Pour déterminer les expressions de l'énergie et de la coénergie pour une position  $\theta$  du rotor, nous pouvons considérer une transformation où la partie mobile est bloquée. Il n'y a alors aucun travail mécanique et les différentielles s'écrivent :

$$dW = \sum_{k=1}^M i_k d\psi_k$$

$$dW' = \sum_{k=1}^M \psi_k di_k$$

Nous obtenons ensuite  $W$  et  $W'$  par intégration, sur les variables  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_M$  pour l'énergie et sur les variables  $i_1, i_2, \dots, i_M$  pour la coénergie. Il n'est pas possible en général de calculer littéralement ces intégrales car les relations entre les courants et les flux ne sont pas linéaires.

### 4.1.3 Expressions du moment du couple électromagnétique

L'énergie  $W$  emmagasinée dans le circuit magnétique est fonction des variables  $\psi_k$  et  $\alpha$ . Sa différentielle peut donc s'écrire à l'aide des dérivées partielles :

$$dW = \sum_{k=1}^M \frac{\partial W}{\partial \psi_k} d\psi_k + \frac{\partial W}{\partial \alpha} d\alpha$$

Identifions alors à l'expression précédente :

$$i_k = \frac{\partial W}{\partial \psi_k}$$

$$\gamma = -\frac{\partial W}{\partial \alpha}$$

C'est surtout la seconde formule qui est intéressante puisque nous cherchons en priorité à exprimer le moment du couple dans l'étude d'une machine tournante.

Une autre formulation du moment du couple peut être obtenue en utilisant la coénergie  $W'$ . Celle-ci est fonction des variables  $i_k$  et  $\alpha$ . Sa différentielle s'écrit :

$$dW' = \sum_{k=1}^M \frac{\partial W'}{\partial i_k} di_k + \frac{\partial W'}{\partial \alpha} d\alpha$$

Nous obtenons par identification :

$$\psi_k = \frac{\partial W'}{\partial i_k}$$

$$\gamma = \frac{\partial W'}{\partial \alpha}$$

### 4.1.4 Cas d'un convertisseur linéaire sans aimants

Si le circuit magnétique est linéaire, le flux total  $\psi_k$  dans le circuit numéro  $k$  s'exprime en fonction des courants  $i_l$  dans les  $M$  circuits et des inductances  $L_{kl}$  (les termes du type  $L_{ll}$  sont des inductances propres et ceux du type  $L_{kl}$  avec  $k \neq l$  sont des inductances mutuelles).

$$\Psi_k = \sum_{l=1}^M L_{kl} i_l$$

L'ensemble de ces relations peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\Psi = \mathbf{L}\mathbf{I}$$

$\Psi$  est la matrice colonne des flux totaux :

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \Psi_M \end{bmatrix}$$

$\mathbf{I}$  est la matrice colonne des courants :

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ i_M \end{bmatrix}$$

$\mathbf{L}$  est la matrice carrée des inductances :

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \dots & L_{1M} \\ L_{21} & L_{22} & \dots & L_{2M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{M1} & L_{M2} & \dots & L_{MM} \end{bmatrix}$$

La différentielle de la coénergie s'écrit :

$$dW' = \sum_{k=1}^M \left( \sum_{l=1}^M L_{kl} i_l \right) di_k$$

Compte tenu de la réciprocité des inductances, cette expression peut s'écrire :

$$dW' = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M L_{kl} (i_l di_k + i_k di_l)$$

ou encore :

$$dW' = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M L_{kl} d(i_k i_l)$$

Nous pouvons alors effectuer l'intégration pour obtenir la coénergie :

$$W' = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M L_{kl} i_k i_l$$

Cette formule peut s'écrire avec les matrices :

$$W' = \frac{1}{2} {}^t \mathbf{I} \mathbf{L} \mathbf{I}$$

Nous obtenons ainsi pour le moment du couple :

$$\gamma = \frac{1}{2} {}^t \mathbf{I} \frac{d\mathbf{L}}{d\alpha} \mathbf{I}$$

#### 4.1.5 Cas d'un convertisseur linéaire comportant des aimants

Dans un convertisseur électromagnétique comportant des aimants permanents, les flux totaux dans les bobinages ne sont pas nuls en l'absence de courants. Pour un circuit magnétique linéaire, le flux total  $\Psi_k$  dans la bobine numéro  $k$  est la somme du flux  $\Psi_{k0}$  dû aux aimants et des flux dus aux courants  $i_l$  dans les  $M$  bobines que nous pouvons exprimer de la même façon que précédemment avec les inductances  $L_{kl}$  :

$$\Psi_k = \Psi_{k0} + \sum_{l=1}^M L_{kl} i_l$$

L'énergie magnétique  $W$  emmagasinée a une valeur non nulle  $W_0$  en l'absence de courants. La coénergie  $W'$  a une valeur opposée puisqu'elle est définie par :

$$W' = \sum_{k=1}^M i_k \Psi_k - W$$

ce qui donne, en l'absence de courants :

$$W'_0 = -W_0$$

$$W' = W'_0 + \sum_{k=1}^M \Psi_{k0} i_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M L_{kl} i_k i_l$$

Cette expression peut être écrite avec les matrices  $\mathbf{I}$  et  $\mathbf{L}$  introduites précédemment et la matrice colonne  $\Psi_0$  des flux produits par les aimants :

$$\Psi_0 = \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \Psi_M \end{bmatrix}$$

Cela donne :

$$\gamma = \frac{dW'_0}{d\alpha} + {}^t\mathbf{I} \frac{d\Psi_0}{d\alpha} + \frac{1}{2} {}^t\mathbf{I} \frac{d\mathbf{L}}{d\alpha} \mathbf{I}$$

Le premier terme correspond à un couple parasite que l'on cherche à réduire lors de la conception de la machine. Par la suite, nous le négligerons dans la modélisation globale des moteurs. Par contre, nous le considérerons seul pour discuter des moyens de le minimiser.

## 4.2 Origine du couple électromagnétique dans les moteurs

### 4.2.1 Moteurs à entrefer constant

Dans les machines à entrefer constant, le couple est dû à l'interaction entre le champ tournant créé par le stator et le champ tournant créé par le rotor.

#### ■ Champ magnétique dans l'entrefer

Le stator et le rotor sont munis d'enroulements polyphasés possédant respectivement  $p_s$  et  $p_r$  paires de pôles et parcourus par des courants polyphasés dont les pulsations respectives sont  $\omega_s$  et  $\omega_r$ .

Les enroulements du stator créent une tension magnétique tournante à la vitesse  $\frac{\omega_s}{p_s}$

dont la répartition est sinusoïdale. Comme l'entrefer a une largeur constante, il lui correspond un champ magnétique tournant qui est également à répartition sinusoïdale. En un point de l'entrefer repéré par l'angle  $\theta$  par rapport à un axe lié au stator (figure 4.1), la mesure algébrique  $B_s$  de la composante radiale du champ magnétique créé par le stator est :

$$B_s = B_{sM} \cos(\omega_s t - p_s \theta)$$

où  $B_{sM}$  est l'amplitude de ce champ.

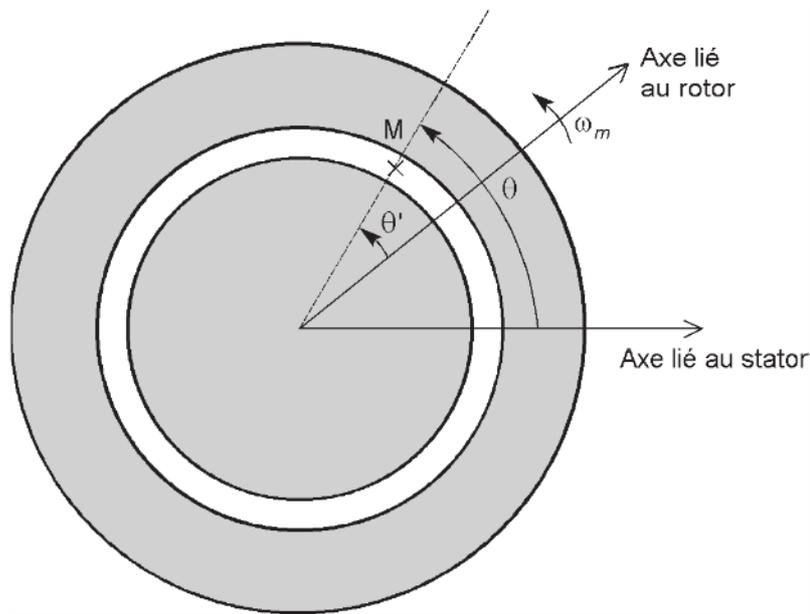


Figure 4.1 – Angles dans les référentiels liés au stator et au rotor.

Les enroulements du rotor créent une tension magnétique tournante à la vitesse  $\frac{\omega_r}{p_r}$  par rapport à ce rotor et dont la répartition est sinusoïdale. Comme l'entrefer a une largeur constante, il lui correspond un champ magnétique tournant qui est également à répartition sinusoïdale. En un point de l'entrefer repéré par l'angle  $\theta'$  par rapport à un axe lié au rotor, la mesure algébrique  $B_r$  de la composante radiale du champ magnétique créé par le rotor est :

$$B_r = B_{rM} \cos(\omega_r t - p_r \theta')$$

où  $B_{rM}$  est l'amplitude de ce champ.

Quand le rotor tourne à la vitesse  $\omega_m$ , les angles  $\theta$  et  $\theta'$  sont liés par la formule :

$$\theta = \theta' + \omega_m t + \alpha_0$$

où  $\alpha_0$  est la position angulaire du rotor à l'instant  $t = 0$ . Remarquons que, compte tenu de sens de référence choisi sur l'axe radial,  $\alpha_0$  est le décalage initial entre un pôle nord du stator et un pôle sud du rotor.

La vitesse du champ tournant rotorique par rapport au stator est  $\frac{\omega_r}{p_r} + \omega_m$ . Définissons la vitesse angulaire électrique correspondante  $\omega_r'$  par :

$$\omega_r' = \omega_r + p_r \omega_m$$

Une nouvelle expression peut être écrite pour le champ magnétique tournant créé par le rotor :

$$B_r = B_{rM} \cos(\omega_r' t - p_r \theta + p_r \alpha_0)$$

Le champ magnétique  $B$  en un point de l'entrefer est la résultante des champs du stator et du rotor :

$$B = B_s + B_r$$

soit :

$$B = B_{sM} \cos(\omega_s t - p_s \theta) + B_{rM} \cos(\omega_r' t - p_r \theta + p_r \alpha_0)$$

### ■ Énergie magnétique emmagasinée

L'énergie magnétique  $W$  est presque exclusivement emmagasinée dans l'entrefer de volume  $V$  puisque la perméabilité  $\mu_0$  de l'air est très faible devant la perméabilité des matériaux ferromagnétiques qui constituent le stator et le rotor. Son expression est donnée par l'intégrale triple :

$$W = \iiint_V \frac{B^2}{2\mu_0} dV$$

Si  $l$  est la longueur de l'entrefer,  $e$  son épaisseur et  $D$  le diamètre d'alésage du stator (figure 4.2), l'élément de volume  $dV$  compris dans un angle élémentaire  $d\theta$  est :

$$dV = le \frac{D}{2} d\theta$$

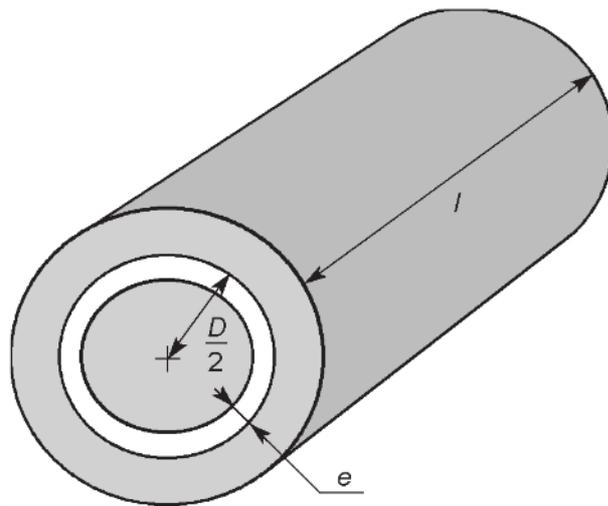


Figure 4.2 – Structure simplifiée d'un moteur à entrefer constant.

L'intégrale triple se ramène à une intégrale simple :

$$W = \frac{leD}{4\mu_0} \int_{-\pi}^{\pi} B^2 d\theta$$

Exprimons le champ magnétique  $B$  avec ses composantes  $B_s$  et  $B_r$  :

$$W = \frac{leD}{4\mu_0} \int_{-\pi}^{\pi} (B_s^2 + B_r^2 + 2B_s B_r) d\theta$$

Calculons séparément les intégrales des trois termes de la somme :

$$I_1 = \int_{-\pi}^{\pi} B_s^2 d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} B_{sM}^2 \cos^2(\omega_s t - p_s \theta) d\theta$$

$$I_2 = \int_{-\pi}^{\pi} B_r^2 d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} B_{rM}^2 \cos^2(\omega_r' t - p_r \theta + p_r \alpha_0) d\theta$$

$$I_3 = \int_{-\pi}^{\pi} 2B_s B_r d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} 2B_{sM} B_{rM} \cos(\omega_s t - p_s \theta) \cos(\omega_r' t - p_r \theta + p_r \alpha_0) d\theta$$

Les deux premières intégrales ont même forme. Comme  $p_s$  et  $p_r$  sont des nombres entiers et que nous savons que la valeur moyenne du carré d'un cosinus sur un nombre entier de périodes vaut 0,5, nous obtenons :

$$I_1 = \pi B_{sM}^2$$

$$I_2 = \pi B_{rM}^2$$

Pour la troisième intégrale, transformons le produit de cosinus en somme grâce à la formule :

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)]$$

Cela donne :

$$I_3 = \int_{-\pi}^{\pi} \{ \cos[(\omega_s + \omega_r')t - (p_s + p_r)\theta + p_r \alpha_0] + \cos[(\omega_s - \omega_r')t - (p_s - p_r)\theta - p_r \alpha_0] \} d\theta$$

Comme la valeur moyenne d'un cosinus sur un nombre entier de périodes est nulle, le premier terme de cette intégrale disparaît. Pour le second terme, il faut distinguer deux cas.

Si  $p_s$  est différent de  $p_r$ , il s'agit encore d'intégrer une fonction sinusoïdale sur un nombre entier de périodes et le résultat est nul. L'énergie magnétique est alors constante :

$$W = \frac{leD\pi}{4\mu_0} (B_{sM}^2 + B_{rM}^2)$$

Le moment du couple, qui s'obtient en dérivant l'énergie par rapport à la position du rotor, est donc nul.

Par contre si  $p_r$  et  $p_s$  sont égaux, la fonction à intégrer dans  $I_3$  est une constante (c'est-à-dire une grandeur indépendante de la variable d'intégration  $\theta$ ) et le résultat n'est pas nul :

$$I_3 = 2\pi \cos[(\omega_s - \omega'_r)t - p_r \alpha_0]$$

L'énergie magnétique est alors, en appelant simplement  $p$  la valeur commune à  $p_s$  et  $p_r$  :

$$W = \frac{leD\pi}{4\mu_0} \{ B_{sM}^2 + B_{rM}^2 + 2B_{sM}B_{rM} \cos[(\omega_s - \omega'_r)t - p\alpha_0] \}$$

Pour pouvoir calculer le moment du couple, il faut faire apparaître la position  $\alpha$  du rotor. Celle-ci s'exprime par :

$$\alpha = \omega_m t + \alpha_0$$

Nous obtenons alors pour l'énergie magnétique :

$$W = \frac{leD\pi}{4\mu_0} \{ B_{sM}^2 + B_{rM}^2 + 2B_{sM}B_{rM} \cos[(\omega_s - \omega_r)t - p\alpha] \}$$

Le moment  $\gamma$  du couple électromagnétique est calculé par la formule :

$$\gamma = -\frac{\partial W}{\partial \alpha}$$

Cela donne :

$$\gamma = -\frac{leD\pi}{2\mu_0} B_{sM}B_{rM} p \sin[(\omega_s - \omega_r)t - p\alpha]$$

Remplaçons de nouveau  $\alpha$  par son expression pour faire apparaître la dépendance de l'argument du sinus par rapport au temps :

$$\gamma = -\frac{leD\pi}{2\mu_0} B_{sM}B_{rM} p \sin[(\omega_s - \omega'_r)t - p\alpha_0]$$

Pour que la valeur moyenne du moment du couple électromagnétique ne soit pas nulle, il faut assurer la condition :

$$\omega_s - \omega'_r = 0$$

soit :

$$\omega_s = \omega_r + p\omega_m$$

Cette égalité implique que les champs tournants du stator et du rotor doivent être synchrones. Quand cette condition est réalisée, le moment du couple électromagnétique est constant :

$$\gamma = \frac{leD\pi}{2\mu_0} B_{sM} B_{rM} p \sin p \alpha_0$$

Une dernière condition d'existence du couple est que  $\sin p \alpha_0$  ne soit pas nul.

#### ■ Conditions d'obtention d'un couple

En résumé, pour obtenir un couple électromagnétique ayant un moment de valeur moyenne non nulle, il faut que :

- les enroulements du stator et du rotor aient le même nombre de pôles ;
- les champs tournants du stator et du rotor soient synchrones ;
- le décalage électrique  $p \alpha_0$  entre les deux champs tournants soit différent de 0 et de  $\pi$ .

#### ■ Expression du moment du couple

Introduisons les amplitudes  $\mathcal{U}_{sM}$  et  $\mathcal{U}_{rM}$  des tensions magnétiques tournantes du stator et du rotor et la perméance  $\mathcal{P}$  de l'entrefer :

$$B_{sM} = \mu_0 \frac{\mathcal{U}_{sM}}{e}$$

$$B_{rM} = \mu_0 \frac{\mathcal{U}_{rM}}{e}$$

$$\mathcal{P} = \mu_0 \frac{\pi D l}{e}$$

L'expression du moment du couple électromagnétique devient :

$$\gamma = \frac{1}{2} p \mathcal{P} \mathcal{U}_{sM} \mathcal{U}_{rM} \sin p \alpha_0$$

Le couple est moteur si le décalage électrique  $p \alpha_0$  est positif. Son moment est maximal si ce décalage vaut  $\frac{\pi}{2}$ .

#### ■ Classification des moteurs à entrefer constant

Pour les moteurs industriels, le stator est presque toujours muni d'un enroulement triphasé alimenté par des courants triphasés.

Dans le cas du moteur asynchrone à rotor bobiné, le rotor comporte également un enroulement triphasé, de même nombre de pôles que celui du stator. En fonctionnement normal, l'enroulement rotorique est court-circuité. Quand le stator est alimenté par des courants sinusoïdaux de pulsation  $\omega_s$  et que le rotor tourne à la vitesse

$\omega_m$ , l'enroulement rotorique est le siège de courants induits dont la pulsation  $\omega_r$  vérifie la condition d'existence du couple :

$$\omega_r = \omega_s - p \omega_m$$

La vitesse  $\omega_m$  du rotor ne peut jamais être égale à la vitesse  $\frac{\omega_s}{p}$  du champ tournant, ce qui justifie l'appellation de moteur asynchrone.

Dans le cas du moteur asynchrone à cage d'écureuil, le rotor comporte des barres longitudinales reliées par deux anneaux, ce qui forme un enroulement en court-circuit dont le nombre de pôles n'est pas prédéfini. Le fonctionnement de la machine fait que ce rotor prend spontanément un nombre de pôles égal à celui de l'enroulement statorique. La condition sur la vitesse est la même que pour un moteur asynchrone à rotor bobiné.

Dans le cas du moteur synchrone, nous avons un cas limite de la condition sur les pulsations puisque le rotor porte un enroulement alimenté en continu, ce qui correspond à du sinusoïdal dont la pulsation  $\omega_r$  tend vers 0. La vitesse angulaire du rotor est donc obligatoirement :

$$\omega_m = \frac{\omega_s}{p}$$

C'est la vitesse de synchronisme. Cette égalité justifie le nom de moteur synchrone.

#### 4.2.2 Moteurs à entrefer variable

##### ■ Champ magnétique dans l'entrefer

La tension magnétique tournante due à l'enroulement du stator est toujours, dans le cas d'une répartition sinusoïdale :

$$\mathcal{U}_s = \mathcal{U}_{sM} \cos(\omega_s t - p_s \theta)$$

$\mathcal{U}_{sM}$  est l'amplitude de la tension magnétique tournante.

Le champ magnétique  $B_s$  est alors :

$$B_s = \mu_0 \frac{\mathcal{U}_s}{e}$$

Pour les moteurs à entrefer variable,  $e$  est fonction de l'angle  $\theta$ .

##### ■ Énergie magnétique emmagasinée

L'énergie magnétique  $W$  est donnée par l'intégrale triple :

$$W = \iiint_V \frac{B_s^2}{2\mu_0} dV$$

soit, en introduisant la tension magnétique :

$$W = \iiint_V \frac{\mu_0}{2e^2} \mathcal{U}_s^2 dV$$

Si  $l$  est la longueur de l'entrefer,  $e$  son épaisseur (fonction de l'angle  $\theta$ ) et  $D$  le diamètre d'alésage du stator, l'élément de volume  $dV$  compris dans un angle élémentaire  $d\theta$  est :

$$dV = le \frac{D}{2} d\theta$$

L'intégrale triple se ramène à une intégrale simple :

$$W = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mu_0 l D}{4e} \mathcal{U}_s^2 d\theta$$

Introduisons la perméance  $\mathcal{P}$  de l'entrefer au point repéré par l'angle  $\theta$  :

$$\mathcal{P} = \mu_0 \frac{\pi D l}{e}$$

Cette grandeur est fonction de  $\theta$  par l'intermédiaire de  $e$ . L'expression de l'énergie magnétique devient :

$$W = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{P} \mathcal{U}_s^2 d\theta$$

La perméance  $\mathcal{P}$  est une fonction périodique de l'angle  $\theta'$  défini par rapport à un axe lié au rotor (*figure 4.3*). Si  $Z$  est le nombre de parties saillantes du rotor, la période est :

$$\tau = \frac{2\pi}{Z}$$

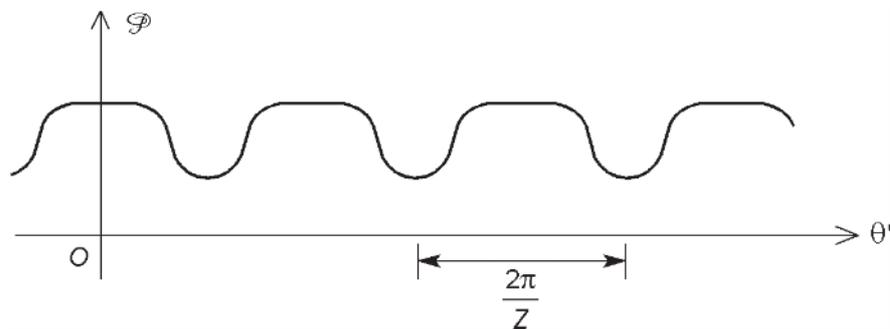


Figure 4.3 – Allure des variations de la perméance de l'entrefer.

Cette fonction peut être décomposée en série de Fourier :

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 + \sum_{k=0}^{+\infty} \mathcal{P}_{kM} \cos kZ\theta'$$

La géométrie de la machine est telle que le fondamental est prépondérant dans la composante variable de la perméance. Nous avons donc approximativement :

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 + \mathcal{P}_{1M} \cos Z\theta'$$

Exprimons cette grandeur en fonction de l'angle  $\theta$  défini par rapport à un axe lié au stator :

$$\theta = \theta' + \omega_m t + \alpha_0$$

Cela donne :

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 + \mathcal{P}_{1M} \cos(Z\theta - Z\omega_m t - Z\alpha_0)$$

L'énergie magnétique s'exprime alors par :

$$W = \frac{U_{sM}^2}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\mathcal{P}_0 + \mathcal{P}_{1M} \cos(Z\theta - Z\omega_m t - Z\alpha_0)] \cos^2(\omega_s t - p_s \theta) d\theta$$

Calculons séparément les deux termes de l'intégrale :

$$I_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{P}_0 \cos^2(\omega_s t - p_s \theta) d\theta$$

$$I_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{P}_{1M} \cos(Z\theta - Z\omega_m t - Z\alpha_0) \cos^2(\omega_s t - p_s \theta) d\theta$$

Comme  $p_s$  est un nombre entier et que la valeur moyenne d'un cosinus au carré sur un nombre entier de périodes est 0,5, la première intégrale vaut :

$$I_1 = \pi \mathcal{P}_0$$

Pour la deuxième intégrale, transformons le carré du cosinus grâce à la formule trigonométrique :

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Nous obtenons :

$$I_2 = \frac{1}{2} \mathcal{P}_{1M} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(Z\theta - Z\omega_m t - Z\alpha_0) + \cos(Z\theta - Z\omega_m t - Z\alpha_0) \cos 2(\omega_s t - p_s \theta)] d\theta$$

Le premier terme est une fonction sinusoïdale à intégrer sur un nombre entier de périodes : le résultat est nul. Le second terme est un produit de cosinus que nous allons transformer en somme grâce à la formule :

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)]$$

Cela donne :

$$I_2 = \frac{1}{4} \mathcal{P}_{1M} \int_{-\pi}^{\pi} \{ \cos[(2\omega_s - Z\omega_m)t + (Z - 2p_s)\theta - Z\alpha_0] + \cos[(2\omega_s + Z\omega_m)t - (Z + 2p_s)\theta + Z\alpha_0] \} d\theta$$

Le second terme de cette somme est nul puisqu'il s'agit encore d'une fonction sinusoïdale à intégrer sur un nombre entier de périodes. Le premier terme est lui aussi nul quand  $Z$  est différent de  $2p_s$ . Par contre, lorsque  $Z$  et  $2p_s$  sont égaux, l'expression à intégrer est indépendante de  $\theta$  et le résultat n'est pas nul :

$$I_2 = \frac{1}{4} \mathcal{P}_{1M} 2\pi \cos[(2\omega_s - Z\omega_m)t - Z\alpha_0]$$

Dans ce cas, l'expression de l'énergie magnétique devient :

$$W = \frac{1}{4} \mathcal{U}_{sM}^2 \left\{ \mathcal{P}_0 + \frac{1}{2} \mathcal{P}_{1M} \cos[(2\omega_s - Z\omega_m)t - Z\alpha_0] \right\}$$

Pour pouvoir calculer le moment du couple, il faut faire apparaître la position  $\alpha$  du rotor. Celle-ci s'exprime par :

$$\alpha = \omega_m t + \alpha_0$$

Nous obtenons alors :

$$W = \frac{1}{4} \mathcal{U}_{sM}^2 \left\{ \mathcal{P}_0 + \frac{1}{2} \mathcal{P}_{1M} \cos(2\omega_s t - Z\alpha) \right\}$$

Le moment du couple électromagnétique est obtenu par la formule :

$$\gamma = -\frac{\partial W}{\partial \alpha}$$

Cela donne :

$$\gamma = -\frac{1}{8} \mathcal{U}_{sM}^2 \mathcal{P}_{1M} Z \sin(2\omega_s t - Z\alpha)$$

Remplaçons de nouveau  $\alpha$  par son expression pour faire apparaître la dépendance de l'argument du sinus par rapport au temps et tenons compte du fait que  $Z$  est égal à  $2p_s$  :

$$\gamma = -\frac{1}{4} \mathcal{U}_{sM}^2 \mathcal{P}_{1M} p_s \sin 2[(\omega_s - p_s \omega_m)t - p_s \alpha_0]$$

Pour que la valeur moyenne du moment de ce couple ne soit pas nulle, il faut assurer la condition :

$$\omega_s = p_s \omega_m$$

Nous obtenons alors :

$$\gamma = \frac{1}{4} \mathcal{U}_{sM}^2 \mathcal{P}_{1M} p_s \sin 2p_s \alpha_0$$

Une dernière condition d'existence du couple est que  $\sin 2p_s \alpha_0$  ne soit pas nul.

#### ■ Conditions d'obtention d'un couple

En résumé, pour obtenir un couple électromagnétique ayant un moment de valeur moyenne non nulle, il faut que :

- le nombre de parties saillantes du rotor soit égal au nombre de pôles de l'enroulement statorique ;
- la vitesse de rotation du rotor soit égale à la vitesse du champ tournant du stator : la machine est donc obligatoirement synchrone ;
- le décalage électrique  $p \alpha_0$  soit différent de 0 et de  $\frac{\pi}{2}$ .

#### ■ Classification des moteurs à entrefer variable

Le moteur synchrone à pôles saillants a un stator identique à celui d'un moteur synchrone à entrefer constant, mais un rotor comportant des parties saillantes régulièrement espacées, nommées pôles saillants, en nombre égal à celui des pôles de l'enroulement statorique. Chaque pôle saillant porte une bobine ou un aimant. Au couple obtenu avec un moteur synchrone à entrefer constant, s'ajoute celui dû à la réluctance variable.

Le moteur synchrone à réluctance variable a une constitution similaire, mais le rotor ne porte ni bobine ni aimant. Le couple n'est dû qu'à la réluctance variable.

# 5 • PERTES ET ÉCHAUFFEMENTS

Une partie de la puissance électrique reçue par le moteur ne peut pas être utilisée pour l'entraînement de la charge mécanique car elle est perdue de diverses façons lors de la conversion électromécanique. Une qualité importante pour un moteur d'avoir des pertes de puissance limitées.

## 5.1 Pertes et rendement

### 5.1.1 Pertes par effet Joule

#### ■ Pertes par effet Joule dans une bobine

Le passage d'un courant d'intensité efficace  $I$  dans une bobine de résistance  $R$  entraîne des pertes par effet Joule  $p_J$  données par la formule :

$$p_J = RI^2$$

#### ■ Effet de la fréquence

La formule précédente s'applique bien pour des conducteurs dont la section n'est pas trop grande et qui sont parcourus par des courants sinusoïdaux de basse fréquence. Il n'en est pas de même lorsque la section des conducteurs est importante et lorsque la fréquence des courants est élevée : les pertes sont alors plus grandes que celles qui peuvent être calculées avec cette formule si la résistance  $R$  a été mesurée en continu. Cet écart est dû à l'effet de peau. Les conséquences sont sensibles pour les moteurs de puissance alimentés par un convertisseur électronique à cause de la présence des harmoniques dans les courants.

La question a été traitée en détail pour des conducteurs placés dans des encoches au paragraphe 2.2.4. Un coefficient correctif  $k_r$  donné par une formule ou une courbe a alors été défini. Le problème est un peu plus compliqué quand il s'agit de bobines concentrées sur des pôles. Le comportement qualitatif est le même, mais un chiffre ne peut être obtenu qu'à partir d'une simulation numérique. Dans quelques cas, les enroulements sont réalisés en fils de litz<sup>1</sup> (fil à brins isolés), ce qui permet de réduire les courants de Foucault et donc l'augmentation des pertes.

1. L'appellation de fil de litz vient de l'allemand *Litzendraht*. Cette traduction bizarre pourrait faire croire qu'il s'agit de l'invention d'un certain monsieur Litz, mais il n'en est rien.

### ■ Influence de la température

Une résistance  $R$  dépend de la température  $\theta$  selon une loi du type :

$$R = R_0 (1 + \alpha \theta)$$

$R_0$  est la valeur de  $R$  à  $\theta = 0$  et  $\alpha$  est un coefficient de température qui dépend du matériau conducteur utilisé. Par exemple, pour le cuivre,  $\alpha = 3,9 \times 10^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ .

Pour chiffrer des pertes, il faut se placer à la température effectivement atteinte par l'enroulement, ou, si elle est inconnue, à une température conventionnelle (souvent  $75 \text{ } ^\circ\text{C}$ ). Quand on connaît la valeur  $R_1$  de la résistance à une température  $\theta_1$ , on peut calculer sa valeur  $R_2$  à la température  $\theta_2$  par la formule :

$$R_2 = R_1 \frac{1 + \alpha \theta_2}{1 + \alpha \theta_1}$$

### ■ Pertes dans un enroulement triphasé

#### □ Formules selon le couplage

Dans un enroulement triphasé couplé en étoile, les courants qui parcourent les trois phases de résistance  $R$  sont directement les courants en ligne  $i_1$ ,  $i_2$  et  $i_3$  (figure 5.1). Ces trois courants ont une intensité efficace  $I$  et les pertes par effet Joule  $p_J$  sont données par la formule :

$$p_J = 3RI^2$$

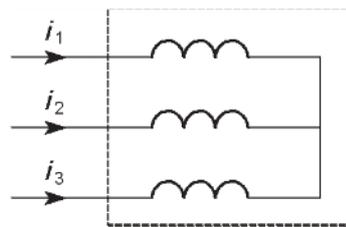


Figure 5.1 – Couplage étoile.

Dans un enroulement triphasé couplé en triangle, les courants qui parcourent les trois phases de résistance  $R$  sont directement les courants polygonaux  $j_{12}$ ,  $j_{23}$  et  $j_{31}$  (figure 5.2). Ces trois courants ont une intensité efficace  $J$  et les pertes par effet Joule  $p_J$  sont données par la formule :

$$p_J = 3RJ^2$$

L'intensité efficace  $J$  des courants polygonaux n'étant pas mesurable sans démonter la machine, il faut l'obtenir à partir de l'intensité efficace  $I$  des courants en ligne :

$$J = \frac{I^2}{\sqrt{3}}$$

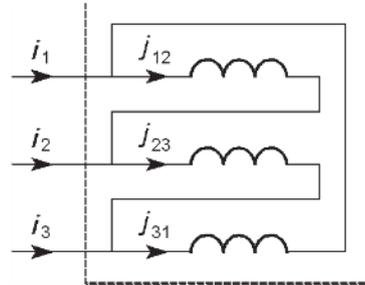


Figure 5.2 – Couplage triangle.

#### □ Formule indépendante du couplage

Il est commode de disposer d'une formule qui permette de calculer les pertes par effet Joule à partir de grandeurs mesurables sur les bornes du moteur sans avoir à se préoccuper du couplage de l'enroulement. Pour cela, il faut mesurer en continu la résistance  $R_a$  entre deux bornes de la machine (chaque bobine se comporte en continu comme une résistance  $R$ ).

Si l'enroulement est en étoile (*figure 5.3*), deux résistances  $R$  sont en série entre deux bornes et la résistance apparente est :

$$R_a = 2R$$

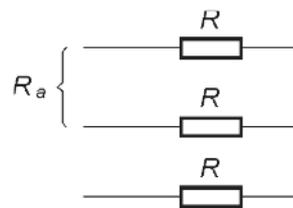


Figure 5.3 – Résistance entre bornes pour un couplage étoile.

Les pertes par effet Joule s'expriment par :

$$p_J = \frac{3}{2} R_a I^2$$

Si l'enroulement est en triangle (*figure 5.4*), deux résistances  $R$  en série sont en parallèle avec la troisième résistance  $R$  et la résistance apparente est :

$$R_a = \frac{2}{3} R$$

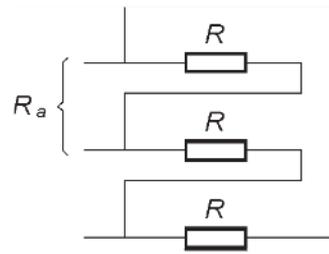


Figure 5.4 – Résistance entre bornes pour un couplage triangle.

Les pertes par effet Joule s'expriment par :

$$p_J = 3 \times \frac{3}{2} R_a J^2$$

soit, en tenant compte de la relation entre les intensités efficaces des courants en ligne et des courants polygonaux :

$$p_J = \frac{3}{2} R_a I^2$$

Cette dernière formule permet donc de calculer les pertes par effet Joule d'un enroulement triphasé à partir de la résistance  $R_a$  mesurée entre deux bornes et de l'intensité efficace  $I$  des courants en ligne et ce, indépendamment du couplage.

### 5.1.2 Pertes ferromagnétiques

#### ■ Introduction

#### □ Phénomène observé

Les flux variables dans les matériaux ferromagnétiques y provoquent des pertes qui entraînent un échauffement.

#### □ Difficultés de modélisation

Deux causes peuvent être invoquées pour les pertes ferromagnétiques : l'hystérésis et les courants de Foucault. Le calcul se heurte cependant à plusieurs difficultés pratiques. Tout d'abord, seule une modélisation globale donne un résultat rigoureux car les phénomènes mis en jeu ne sont pas indépendants : ainsi, la présence de courants de Foucault modifie le cycle d'hystérésis du matériau. Ensuite, une étude en régime sinusoïdal permanent ne permet pas d'obtenir des résultats pour des variations quelconques puisque les phénomènes ne sont pas linéaires.

Une modélisation exacte est donc complexe et ne donne pas de résultats facilement utilisables. On se contente donc dans la pratique de démarches approchées qui, malgré leur manque de rigueur, aboutissent à des formules assez simples qui permettent de chiffrer approximativement les pertes et surtout de mettre en évidence les paramètres sur lesquels il faut agir pour les minimiser.

### □ Décomposition des pertes

Il est d'usage de séparer les pertes ferromagnétiques en plusieurs termes qui seront précisés dans la suite :

- les pertes par hystérésis ;
- les pertes par courants de Foucault ;
- les pertes anormales.

Cette décomposition est artificielle puisque nous avons déjà signalé que les phénomènes ne sont pas indépendants. Une évaluation acceptable des pertes sera néanmoins obtenue en faisant la somme des différentes contributions.

### ■ Pertes par hystérésis

#### □ Origine

Quand le champ magnétique augmente d'une quantité élémentaire  $dB$ , l'énergie magnétique volumique varie de  $HdB$ . Dans le plan  $(H, B)$  cela correspond à l'aire d'une bande élémentaire (figure 5.5).

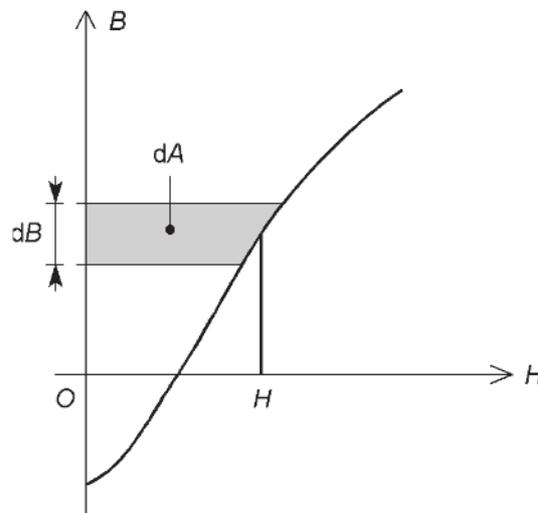


Figure 5.5 – Énergie magnétique volumique élémentaire.

Lorsque l'excitation magnétique  $H$  croît de 0 à une valeur  $H_M$ , la variation de l'énergie magnétique volumique est égale à l'aire hachurée  $A_1$  (figure 5.6).

Si maintenant l'excitation magnétique  $H$  décroît de  $H_M$  à 0, le parcours du point représentatif dans le plan  $(H, B)$  est différent du fait de l'hystérésis. La variation de l'énergie magnétique volumique est l'opposé de l'aire hachurée  $A_2$  (figure 5.7).

L'énergie restituée dans la phase de décroissance est plus faible que l'énergie reçue dans la phase de croissance. La différence a été dissipée sous forme de chaleur. Elle est représentée par l'aire  $A$  dans le plan  $(H, B)$ .

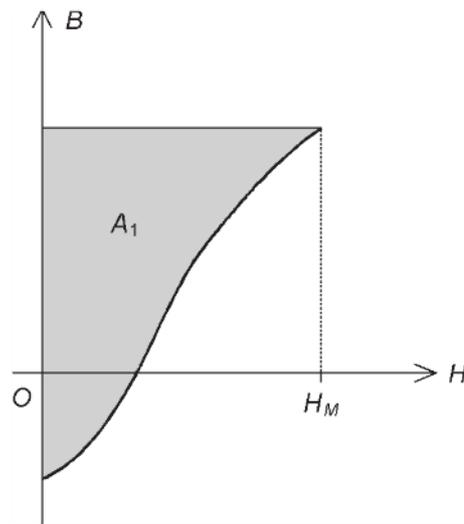


Figure 5.6 – Variation d'énergie magnétique volumique à excitation croissante.

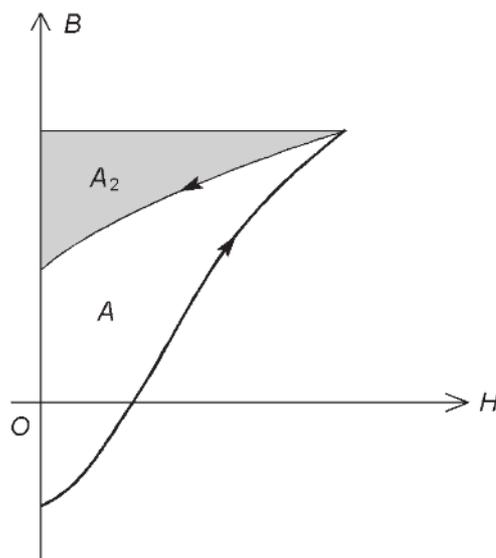


Figure 5.7 – Variation d'énergie magnétique volumique à excitation décroissante.

#### □ Formule générale

Lorsque l'excitation magnétique varie alternativement, la caractéristique magnétique devient un cycle fermé (C) parcouru périodiquement. Lors d'une période, l'énergie volumique  $\frac{dW_H}{dv}$  dissipée est égale à la surface A du cycle (figure 5.8) :

$$\frac{dW_H}{dv} = \oint_{(C)} H dB$$

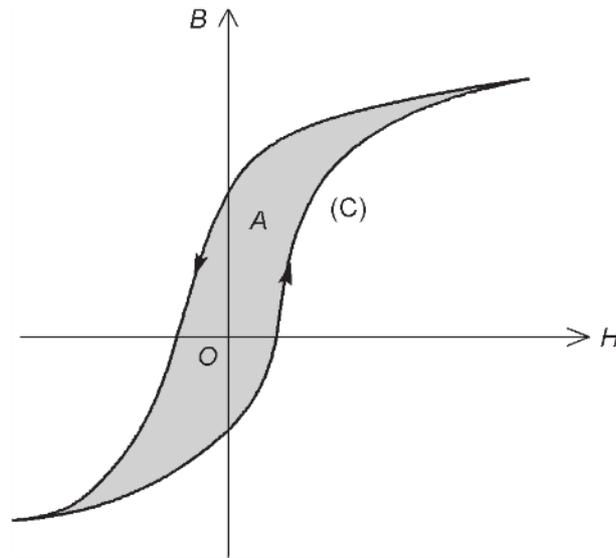


Figure 5.8 – Énergie volumique perdue par hystérésis.

Si la fréquence du phénomène est  $f$ , la puissance volumique  $\frac{dP_H}{dv}$  dissipée est :

$$\frac{dP_H}{dv} = f \oint_{(C)} H dB$$

Pour réduire les pertes par hystérésis, on a intérêt à employer des matériaux ayant un cycle étroit.

Le problème dans l'application de la formule, en dehors du fait que nous ne pouvons pas donner un résultat sous forme littérale, est la méconnaissance du cycle d'hystérésis. En effet, ce dernier dépend de la forme des variations de l'excitation magnétique, de leur amplitude, de leur fréquence, de l'épaisseur des tôles utilisées (celle-ci modifie les courants de Foucault qui eux-mêmes agissent sur le cycle).

En général, nous ne disposons que d'un cycle d'hystérésis statique, c'est-à-dire tracé avec des variations lentes, et ceci, pour diverses valeurs de l'amplitude du champ magnétique. C'est donc dans ces conditions que nous chiffrons les pertes par hystérésis alors qu'il nous faudrait normalement prendre en compte un cycle dynamique, tracé dans les conditions où est utilisé le matériau. La différence est prise en compte dans les autres termes formant les pertes ferromagnétiques. Nous voyons bien ici le paradoxe de la méthode : les pertes par hystérésis ne sont pas celles qui existent réellement dans l'utilisation du matériau.

#### □ Formules empiriques

L'utilisation pratique de la formule précédente étant peu commode, puisqu'il faut chiffrer une aire limitée par un cycle de forme compliquée, on préfère faire appel à des formules empiriques pour chiffrer le phénomène. On constate expérimentalement

que les pertes par hystérésis pour les matériaux rencontrés habituellement sont approximativement proportionnelles au carré de l'amplitude  $B_M$  du champ magnétique :

$$\frac{dP_H}{dv} = k_H B_M^2 f$$

Le coefficient  $k_H$  dépend du matériau et de l'ordre de grandeur des champs magnétiques utilisés. Cette formule est assez bien vérifiée pour les matériaux actuels avec un champ magnétique assez élevé ( $B_M > 1\text{T}$ ).

Pour être plus précis, on peut définir un exposant  $n$  dont la valeur est comprise entre 1,5 et 2,5 selon le matériau et l'ordre de grandeur des champs magnétiques utilisés :

$$\frac{dP_H}{dv} = k_H B_M^n f$$

Charles Proteus Steinmetz avait trouvé empiriquement une formule de ce type avec  $n = 1,6$ . Cela ne correspond plus aux matériaux utilisés de nos jours.

Rudolf Richter a également proposé une formule qui sépare un terme proportionnel à  $B_M$  et un autre proportionnel à son carré :

$$\frac{dP_H}{dv} = f(aB_M + bB_M^2)$$

Cela revient à peu près à la première formule empirique quand le champ est assez élevé et que le second terme est alors prépondérant.

### ■ Pertes par courants de Foucault

#### □ Origine

Les matériaux ferromagnétiques sont conducteurs. Lorsqu'ils sont soumis à un champ magnétique variable  $\mathbf{B}$ , ils sont le siège de courants induits appelés courants de Foucault. En effet, l'équation de Maxwell-Faraday montre qu'il apparaît un champ électrique  $\mathbf{E}$  tel que :

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Si le matériau a une conductivité  $\sigma$  (inverse de la résistivité  $\rho$ ), la densité de courant  $\mathbf{J}$  obtenue est donnée par :

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

Les formules précédentes montrent que si le champ magnétique a une mesure algébrique fonction sinusoidale du temps, d'amplitude  $B_M$  et de fréquence  $f$ , le champ électrique et donc la densité de courant ont une mesure algébrique proportionnelle à  $fB_M$ .

### □ Comportement général

Les courants de Foucault provoquent des pertes par effet Joule. La puissance volumique correspondante est :

$$\frac{dP_F}{dv} = \sigma E^2$$

Il en résulte que les pertes volumiques par courant de Foucault sont proportionnelles à  $(fB_M)^2$  :

$$\frac{dP_F}{dv} = k_F B_M^2 f^2$$

Le coefficient  $k_F$  dépend de la forme et des dimensions et il est inversement proportionnel à la résistivité du matériau. Les constructeurs utilisent donc des matériaux ferromagnétiques à forte résistivité.

### □ Étude simplifiée ne tenant pas compte de l'effet de peau

Les circuits magnétiques des machines sont souvent constitués de tôles minces isolées les unes des autres. Considérons une tôle de longueur  $L$ , de largeur  $l$  et d'épaisseur  $e$ , soumise à un champ magnétique uniforme dont la direction est la longueur de la tôle (*figure 5.9*).

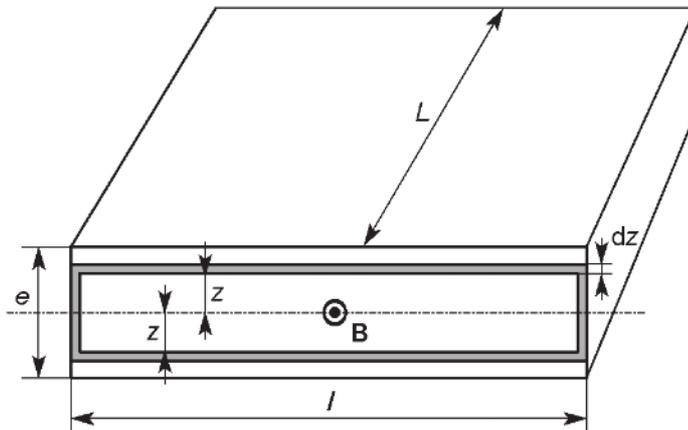


Figure 5.9 – Courants de Foucault dans une tôle.

Les lignes de courant se ferment dans des sections droites des tôles. Décomposons la tôle en circuits élémentaires comme celui qui est hachuré sur la figure : deux tranches d'épaisseur  $dz$  situées symétriquement à la distance  $z$  du plan médian et refermées verticalement aux deux extrémités. Cette spire embrasse un flux :

$$\varphi = BS = 2z l B$$

Elle est donc le siège d'une force électromotrice induite :

$$e = -\frac{d\varphi}{dt} = -2zl \frac{dB}{dt}$$

La conductance de la spire est, en négligeant  $2z$  devant  $2l$  :

$$dG = \sigma \frac{L}{2l} dz$$

La puissance instantanée dissipée dans une spire est :

$$dp_F = e^2 dG = 4z^2 l^2 \left(\frac{dB}{dt}\right)^2 \sigma \frac{L}{2l} dz$$

$$dp_F = 2\sigma lL \left(\frac{dB}{dt}\right)^2 z^2 dz$$

La puissance instantanée dissipée dans la tôle est obtenue en intégrant dans l'intervalle  $[0, \frac{e}{2}]$  :

$$p_F = \int_0^{\frac{e}{2}} 2\sigma lL \left(\frac{dB}{dt}\right)^2 z^2 dz = 2\sigma lL \left(\frac{dB}{dt}\right)^2 \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^{\frac{e}{2}}$$

Calculons la différence et introduisons la résistivité  $\rho$  ( $\sigma = \frac{1}{\rho}$ ) :

$$p_F = \frac{lLe^3}{12\rho} \left(\frac{dB}{dt}\right)^2$$

Lorsque le fonctionnement est périodique, de période  $T$ , la puissance moyenne est :

$$P_F = \frac{1}{T} \int_0^T p_F dt$$

Considérons le cas où la mesure algébrique du champ magnétique est une fonction sinusoïdale du temps d'amplitude  $B_M$  et de pulsation  $\omega$  :

$$B = B_M \cos \omega t$$

La puissance instantanée s'écrit :

$$p_F = \frac{lLe^3}{12\rho} B_M^2 \omega^2 \sin^2 \omega t$$

Compte tenu que la valeur moyenne d'un sinus au carré vaut 0,5, la puissance moyenne dissipée dans la tôle est :

$$P_F = \frac{lLe^3}{24\rho} B_M^2 \omega^2$$

Introduisons la fréquence  $f$  :

$$P_F = \frac{lLe^3}{24\rho} B_M^2 4\pi^2 f^2$$

Remarquons que  $lLe$  est le volume  $V$  de la tôle :

$$P_F = \frac{\pi^2 V e^2}{6\rho} B_M^2 f^2$$

Les pertes volumiques sont donc données par la formule :

$$\frac{dP_F}{dv} = \frac{\pi^2 e^2}{6\rho} B_M^2 f^2$$

Nous retrouvons bien la propriété générale : les pertes par courant de Foucault sont proportionnelles au carré de l'amplitude du champ magnétique et au carré de la fréquence et inversement proportionnelles à la résistivité du matériau. De plus, nous avons établi ici que les pertes volumiques sont proportionnelles au carré de l'épaisseur de la tôle. Les constructeurs produisent donc des tôles minces destinées à être employées dans des circuits magnétiques feuilletés.

Dans le cas d'une tôle, le coefficient  $k_F$  introduit dans la théorie générale est donné par l'expression :

$$k_F = \frac{\pi^2 e^2}{6\rho}$$

Quand le champ n'est pas sinusoïdal, nous pouvons introduire ce même coefficient dans la formule, ce qui donne, après division par  $lLe$  pour obtenir une puissance volumique :

$$\frac{dP_F}{dv} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{k_F}{2\pi^2} \left( \frac{dB}{dt} \right)^2 dt$$

#### □ Influence de l'effet de peau

Les formules établies précédemment ne sont valables que si la densité de courant est uniforme dans le matériau, c'est-à-dire si l'effet de peau est négligeable. C'est effectivement le cas pour des tôles minces à des fréquences basses comme le 50 Hz, mais ce n'est en général plus le cas pour des fréquences plus élevées comme celles des harmoniques. Il faut alors reprendre l'étude à partir des équations de Maxwell en régime quasi-statique.

Considérons une tôle d'épaisseur  $e$  suivant un axe  $Oz$  et de dimensions  $L$  et  $l$  suffisamment grandes dans les autres directions pour que les différentes grandeurs

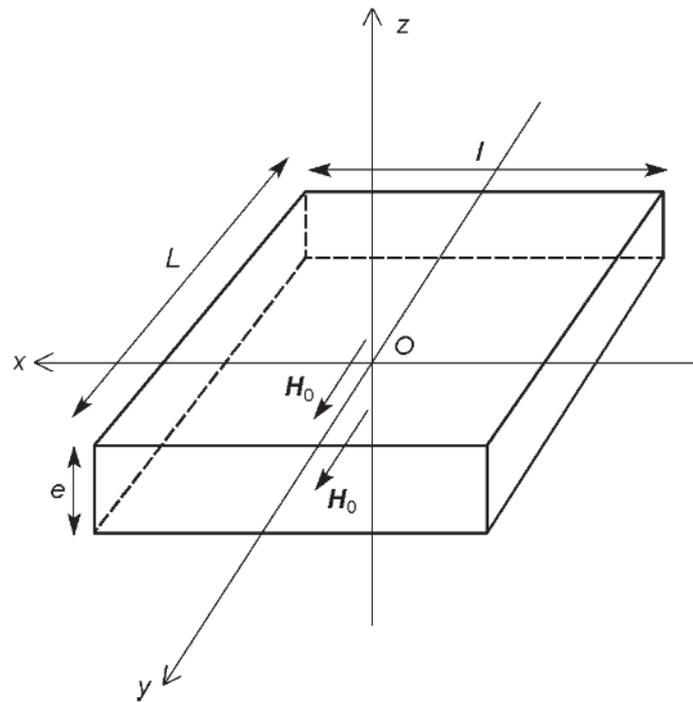


Figure 5.10 – Tôle mince.

ne soient fonctions que de la seule coordonnée  $z$  (figure 5.10). Le repère a été choisi de façon que les conditions aux limites pour l'excitation magnétique soient  $H_x = 0$ ,  $H_z = 0$  et  $H_y = H_0$  pour  $z = \frac{e}{2}$  et  $z = -\frac{e}{2}$ .

#### Répartition de l'excitation magnétique

Déterminons pour commencer la répartition de l'excitation magnétique dans le matériau. En régime sinusoïdal permanent, nous employons les vecteurs complexes. Reprenons la formule établie au paragraphe 2.1.7 :

$$\Delta \underline{\mathbf{H}} = \frac{j\mu\omega}{\rho} \underline{\mathbf{H}}$$

Celle-ci peut se mettre sous la forme :

$$\Delta \underline{\mathbf{H}} - \beta^2 \underline{\mathbf{H}} = 0$$

en posant :

$$\beta = (1 + j) \sqrt{\frac{\mu\omega}{\rho}}$$

Faisons apparaître ici la profondeur de pénétration  $\delta$  :

$$\delta = \sqrt{\frac{2\rho}{\mu\omega}}$$

Nous obtenons ainsi :

$$\beta = \frac{1+j}{\delta}$$

Comme le vecteur excitation magnétique n'a qu'une seule composante suivant l'axe  $Oy$  et que celle-ci ne dépend que de la coordonnée  $z$ , nous obtenons :

$$\frac{d^2 H_y}{dz^2} - \beta^2 H_y = 0$$

La solution de cette équation différentielle est de la forme :

$$\underline{H}_y = C_1 \operatorname{ch} \beta z + C_2 \operatorname{sh} \beta z$$

Les constantes d'intégration sont déterminées par les conditions aux limites. Sachant que  $\underline{H}_y$  vaut  $\underline{H}_0$  pour  $z = \frac{e}{2}$  et pour  $z = -\frac{e}{2}$ , nous avons :

$$C_1 \operatorname{ch} \frac{\beta e}{2} + C_2 \operatorname{sh} \frac{\beta e}{2} = \underline{H}_0$$

$$C_1 \operatorname{ch} \frac{\beta e}{2} - C_2 \operatorname{sh} \frac{\beta e}{2} = \underline{H}_0$$

Nous en déduisons :

$$C_1 = \frac{\underline{H}_0}{\operatorname{ch} \frac{\beta e}{2}}$$

$$C_2 = 0$$

L'expression de la composante de l'excitation magnétique est ainsi :

$$\underline{H}_y = \underline{H}_0 \frac{\operatorname{ch} \beta z}{\operatorname{ch} \frac{\beta e}{2}}$$

### *Répartition de la densité de courant*

La densité de courant peut alors être déterminée par l'une des équations de Maxwell :

$$\operatorname{rot} \underline{H} = \underline{J}$$

Elle se réduit à sa seule composante suivant l'axe  $Ox$  :

$$\underline{J}_x = -\frac{d H_y}{dz}$$

soit :

$$\underline{J_x} = -\underline{\beta} \underline{H_0} \frac{\text{sh} \underline{\beta} z}{\text{ch} \frac{\underline{\beta} e}{2}}$$

### Calcul des valeurs efficaces

Pour exprimer les pertes par courants de Foucault, nous aurons besoin de calculer les valeurs efficaces de la densité de courant et de l'excitation magnétique, qui sont les modules des grandeurs complexes correspondantes. Pour cela, commençons par remplacer le nombre complexe  $\beta$  par son expression :

$$\underline{H_y} = \underline{H_0} \frac{\text{ch}(1+j)\frac{z}{\delta}}{\text{ch}(1+j)\frac{e}{2\delta}}$$

$$\underline{J_x} = -\frac{1+j}{\delta} \underline{H_0} \frac{\text{sh}(1+j)\frac{z}{\delta}}{\text{ch}(1+j)\frac{e}{2\delta}}$$

Pour faire apparaître des fonctions réelles, utilisons deux formules de trigonométrie hyperbolique :

$$\text{ch}(a+b) = \text{ch} a \text{ch} b + \text{sh} a \text{sh} b$$

$$\text{sh}(a+b) = \text{sh} a \text{ch} b + \text{ch} a \text{sh} b$$

et tenons compte du fait que :

$$\text{ch} ja = \cos a$$

$$\text{sh} ja = j \sin a$$

Cela nous permet d'écrire :

$$\text{ch} \underline{\beta} z = \text{ch} \frac{1+j}{\delta} z = \text{ch} \frac{z}{\delta} \cos \frac{z}{\delta} + j \text{sh} \frac{z}{\delta} \sin \frac{z}{\delta}$$

$$\text{sh} \underline{\beta} z = \text{sh} \frac{1+j}{\delta} z = \text{sh} \frac{z}{\delta} \cos \frac{z}{\delta} + j \text{ch} \frac{z}{\delta} \sin \frac{z}{\delta}$$

Exprimons le carré du module des grandeurs précédentes :

$$|\text{ch} \underline{\beta} z|^2 = \text{ch}^2 \frac{z}{\delta} \cos^2 \frac{z}{\delta} + \text{sh}^2 \frac{z}{\delta} \sin^2 \frac{z}{\delta}$$

$$|\text{sh} \underline{\beta} z|^2 = \text{sh}^2 \frac{z}{\delta} \cos^2 \frac{z}{\delta} + \text{ch}^2 \frac{z}{\delta} \sin^2 \frac{z}{\delta}$$

Ces expressions se simplifient en utilisant les formules suivantes :

$$\begin{aligned}\cos^2 a &= \frac{1 + \cos 2a}{2} & \sin^2 a &= \frac{1 - \cos 2a}{2} \\ \operatorname{ch}^2 a &= \frac{\operatorname{ch} 2a + 1}{2} & \operatorname{sh}^2 a &= \frac{\operatorname{ch} 2a - 1}{2}\end{aligned}$$

Cela donne :

$$\begin{aligned}|\operatorname{ch} \beta z|^2 &= \frac{1}{2} \left( \operatorname{ch} \frac{2z}{\delta} + \cos \frac{2z}{\delta} \right) \\ |\operatorname{sh} \beta z|^2 &= \frac{1}{2} \left( \operatorname{ch} \frac{2z}{\delta} - \cos \frac{2z}{\delta} \right)\end{aligned}$$

Nous pouvons ainsi écrire les modules des grandeurs complexes :

$$\begin{aligned}|\underline{H}_y| &= |\underline{H}_0| \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \frac{2z}{\delta} + \cos \frac{2z}{\delta}}{\operatorname{ch} \frac{e}{\delta} + \cos \frac{e}{\delta}}} \\ |\underline{J}_x| &= \frac{\sqrt{2}}{\delta} |\underline{H}_0| \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \frac{2z}{\delta} - \cos \frac{2z}{\delta}}{\operatorname{ch} \frac{e}{\delta} + \cos \frac{e}{\delta}}}\end{aligned}$$

### Flux magnétique utile

Le flux magnétique  $\underline{\Phi}$  qui traverse la tôle est :

$$\underline{\Phi} = l \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} B_y dz = \mu l \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} H_y dz$$

Remplaçons l'excitation magnétique par son expression :

$$\underline{\Phi} = \mu l \frac{H_0}{\operatorname{ch}(1+j) \frac{e}{2\delta}} \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \operatorname{ch}(1+j) \frac{z}{\delta} dz$$

Nous pouvons intégrer directement :

$$\underline{\Phi} = \mu l \frac{H_0}{\operatorname{ch}(1+j) \frac{e}{2\delta}} \left[ \frac{\delta}{1+j} \operatorname{sh}(1+j) \frac{z}{\delta} \right]_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}}$$

$$\underline{\Phi} = 2\mu l \frac{\delta}{1+j} \frac{H_0}{\frac{\text{sh}(1+j)\frac{e}{2\delta}}{\text{ch}(1+j)\frac{e}{2\delta}}}$$

La valeur efficace du flux est le module de la grandeur complexe. En utilisant les mêmes formules qu'auparavant, nous obtenons :

$$|\underline{\Phi}| = 2\mu l \frac{\delta}{\sqrt{2}} |H_0| \sqrt{\frac{\text{ch}\frac{e}{\delta} - \cos\frac{e}{\delta}}{\text{ch}\frac{e}{\delta} + \cos\frac{e}{\delta}}}$$

Nous pouvons en déduire l'amplitude  $\Phi_M$  de ce flux :

$$\Phi_M = |\underline{\Phi}| \sqrt{2} = 2\mu l \delta |H_0| \sqrt{\frac{\text{ch}\frac{e}{\delta} - \cos\frac{e}{\delta}}{\text{ch}\frac{e}{\delta} + \cos\frac{e}{\delta}}}$$

Nous introduirons dans la formule des pertes l'amplitude moyenne du champ magnétique qui s'exprime par :

$$B_{M\text{moy}} = \frac{\Phi_M}{le} = 2 \frac{\mu \delta}{e} |H_0| \sqrt{\frac{\text{ch}\frac{e}{\delta} - \cos\frac{e}{\delta}}{\text{ch}\frac{e}{\delta} + \cos\frac{e}{\delta}}}$$

### Expression des pertes

Les pertes par courant de Foucault dans le volume  $V$  de matériau ferromagnétique de résistivité  $\rho$  sont données par :

$$P_F = \rho \iiint_V |\underline{J}_x|^2 dv$$

En tenant compte de l'expression de  $|\underline{J}_x|$  et de l'expression du volume élémentaire  $dv = Lldz$ , nous obtenons :

$$P_F = \rho Ll \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \frac{2}{\delta^2} |H_0|^2 \frac{\text{ch}\frac{2z}{\delta} - \cos\frac{2z}{\delta}}{\text{ch}\frac{e}{\delta} + \cos\frac{e}{\delta}} dz$$

Cette intégrale peut être calculée directement :

$$P_F = \frac{2\rho Ll}{\delta^2} \frac{|H_0|^2}{\operatorname{ch} \frac{e}{\delta} + \cos \frac{e}{\delta}} \frac{\delta}{2} \left[ \operatorname{sh} \frac{2z}{\delta} - \sin \frac{2z}{\delta} \right]_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}}$$

Cela donne :

$$P_F = \frac{2\rho Ll}{\delta} |H_0|^2 \frac{\operatorname{sh} \frac{e}{\delta} - \sin \frac{e}{\delta}}{\operatorname{ch} \frac{e}{\delta} + \cos \frac{e}{\delta}}$$

Introduisons l'amplitude moyenne du champ magnétique en écrivant :

$$\operatorname{ch} \frac{e}{\delta} + \cos \frac{e}{\delta} = \left( \operatorname{ch} \frac{e}{\delta} - \cos \frac{e}{\delta} \right) \frac{4\mu^2 \delta^2 |H_0|^2}{e^2 B_{M\text{moy}}^2}$$

Nous obtenons ainsi :

$$P_F = \frac{2\rho Ll}{\delta} |H_0|^2 \frac{e^2}{4\mu^2 \delta^2 |H_0|^2} B_{M\text{moy}}^2 \frac{\operatorname{sh} \frac{e}{\delta} - \sin \frac{e}{\delta}}{\operatorname{ch} \frac{e}{\delta} - \cos \frac{e}{\delta}}$$

soit, après simplification :

$$P_F = \frac{\rho L l e^2}{2\mu^2 \delta^3} B_{M\text{moy}}^2 \frac{\operatorname{sh} \frac{e}{\delta} - \sin \frac{e}{\delta}}{\operatorname{ch} \frac{e}{\delta} - \cos \frac{e}{\delta}}$$

En remarquant que  $Lle$  est le volume de la tôle, nous pouvons exprimer les pertes volumiques :

$$\frac{dP_F}{dv} = \frac{\rho e}{2\mu^2 \delta^3} B_{M\text{moy}}^2 \frac{\operatorname{sh} \frac{e}{\delta} - \sin \frac{e}{\delta}}{\operatorname{ch} \frac{e}{\delta} - \cos \frac{e}{\delta}}$$

### Formules approchées

Lorsque l'épaisseur  $e$  de la tôle est faible devant la profondeur de pénétration  $\delta$ , nous retrouvons la formule établie directement sans considérer l'effet de peau. En effet, lorsque le rapport  $\frac{e}{\delta}$  est petit devant 1, nous pouvons remplacer les fonctions trigonométriques et hyperboliques par leur développement limité. Celui-ci est écrit à l'ordre 3 car les termes d'ordre 1 s'éliminent dans la différence qui apparaît au numérateur de l'expression et l'ordre 2 en est absent :

$$\operatorname{sh} x \approx x + \frac{x^3}{6}$$

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$$

$$\operatorname{ch} x \approx 1 + \frac{x^2}{2}$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$

L'expression approchée de la puissance volumique est alors :

$$\frac{dP_F}{dv} \approx \frac{\rho e}{2\mu^2\delta^3} B_{M\text{moy}}^2 \frac{\frac{e}{\delta} + \frac{1}{6}\left(\frac{e}{\delta}\right)^3 - \left[\frac{e}{\delta} - \frac{1}{6}\left(\frac{e}{\delta}\right)^3\right]}{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{e}{\delta}\right)^2 - \left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{e}{\delta}\right)^2\right]}$$

Cette formule se simplifie :

$$\frac{dP_F}{dv} = \frac{\rho e^2}{6\mu^2\delta^4} B_{M\text{moy}}^2$$

Remplaçons  $\delta$  par son expression :

$$\frac{dP_F}{dv} = \frac{\rho e^2}{6\mu^2} \frac{\omega^2 \mu^2}{4\rho^2} B_{M\text{moy}}^2 = \frac{e^2 \omega^2}{24\rho} B_{M\text{moy}}^2$$

Pour terminer, introduisons la fréquence  $f$  en remplaçant la pulsation  $\omega$  par  $2\pi f$  :

$$\frac{dP_F}{dv} = \frac{\pi^2}{6} \frac{e^2}{\rho} f^2 B_{M\text{moy}}^2$$

C'est bien l'expression qui avait été obtenue en ne considérant pas l'effet de peau. Dans ce cas, il n'y avait cependant pas de valeur moyenne pour l'amplitude du champ magnétique puisque celui-ci était constant par hypothèse.

Numériquement, l'erreur apportée par l'emploi de cette formule approchée est acceptable dès lors que l'épaisseur  $e$  de la tôle est inférieure à la profondeur de pénétration  $\delta$ . Ainsi, pour une tôle d'épaisseur  $e = 0,4$  mm, formée d'un matériau ferromagnétique ayant une conductivité  $\sigma = 2 \times 10^6$  S · m<sup>-1</sup> et une perméabilité relative  $\mu_r = 10^4$  et utilisée à la fréquence de 50 Hz, l'épaisseur de peau vaut :

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{2 \times 10^6 \times \pi \times 4\pi \times 10^{-7} \times 50}} = 0,5 \text{ mm}$$

La formule approchée peut donc être utilisée pour déterminer les pertes dues au fondamental. Par contre, pour chiffrer les pertes dues aux harmoniques, l'emploi de la formule complète est inévitable.

Une autre expression approchée peut être obtenue lorsque, à l'inverse, l'épaisseur  $e$  de la tôle est grande devant la profondeur de pénétration  $\delta$ . En effet, quand le rapport  $\frac{e}{\delta}$  est grand, le sinus est négligeable devant le sinus hyperbolique et le cosinus est négligeable devant le cosinus hyperbolique. Les deux fonctions hyperboliques se comportent alors comme  $\frac{e^x}{2}$  et leur rapport vaut donc à peu près 1. La formule approchée des pertes volumiques est ainsi :

$$\frac{dP_F}{dv} \approx \frac{\rho e}{2\mu^2 \delta^3} B_{M\text{moy}}^2$$

Remplaçons  $\delta$  par son expression :

$$\frac{dP_F}{dv} = \frac{\rho e}{2\mu^2} \left( \frac{\mu \omega}{2\rho} \right)^{\frac{3}{2}} B_{M\text{moy}}^2$$

Cette expression se simplifie un peu :

$$\frac{dP_F}{dv} = \frac{e \omega^{\frac{3}{2}}}{4\sqrt{2\mu\rho}} B_{M\text{moy}}^2$$

Dans ce cas, les pertes par courants de Foucault ne sont plus proportionnelles au carré de la fréquence, mais à sa puissance  $\frac{3}{2}$ .

Numériquement, l'erreur apportée par l'emploi de cette seconde formule approchée est acceptable dès lors que l'épaisseur  $e$  de la tôle est supérieure à 4 fois la profondeur de pénétration  $\delta$ .

### ■ Pertes anormales

Dans les matériaux à gros grains, un autre phénomène intervient. L'espacement important entre les parois des domaines provoque une modification de la répartition des courants de Foucault entraînant un accroissement des pertes correspondantes. Le terme supplémentaire forme les pertes anormales appelées également pertes en excès.

On montre que, lorsque le champ magnétique est sinusoïdal, les pertes anormales volumiques sont proportionnelles à la puissance 1,5 de l'amplitude du champ et de la fréquence :

$$\frac{dP_A}{dv} = k_A B_M^{\frac{3}{2}} f^{\frac{3}{2}}$$

Quand le champ magnétique n'est pas sinusoïdal, la formule devient :

$$\frac{dP_A}{dv} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{k_A}{(2\pi^2)^{\frac{3}{4}}} \left| \frac{dB}{dt} \right|^{\frac{3}{2}} dt$$

### ■ Pertes totales

Pour évaluer globalement les pertes ferromagnétiques, une première approche consiste à considérer que le champ magnétique est sinusoïdal et à faire la somme des trois contributions qui viennent d'être étudiées. Ainsi la puissance volumique totale est :

$$\frac{dP_f}{dv} = k_H f B_M^2 + k_F f^2 B_M^2 + k_A f^{\frac{3}{2}} B_M^{\frac{3}{2}}$$

Dans la pratique, le champ magnétique dans les moteurs est assez éloigné du sinusoïdal et le résultat obtenu par cette formule est largement sous-évalué. Il est envisageable d'utiliser cette même formule pour calculer les pertes dues aux harmoniques du champ magnétique, mais les diverses contributions ne s'ajoutent pas puisque les phénomènes ne sont pas linéaires. Le résultat qu'on obtiendrait par ce procédé est toujours nettement inférieur à la réalité. Il faut donc utiliser une formule faisant apparaître le taux de variation du champ magnétique :

$$\frac{dP_f}{dv} = k_H f B_M^2 + \frac{1}{T} \int_0^T \frac{k_F}{2\pi^2} \left( \frac{dB}{dt} \right)^2 dt + \frac{1}{T} \int_0^T \frac{k_A}{(2\pi^2)^{\frac{3}{4}}} \left| \frac{dB}{dt} \right|^{\frac{3}{2}} dt$$

La difficulté principale consiste à évaluer ce taux de variation qui diffère suivant les conditions de fonctionnement dans les diverses parties de matériaux magnétiques constituant le moteur. Une analyse précise implique obligatoirement l'emploi d'un logiciel d'étude des champs.

#### 5.1.3 Pertes mécaniques

Les pertes mécaniques comprennent :

- les pertes par frottement sur les paliers ;
- les pertes par frottement des balais pour les moteurs qui en sont munis ;
- les pertes par ventilation.

Les pertes par frottement sur les paliers ont un comportement compliqué qui dépend de nombreux paramètres : qualité de l'usinage, lubrification, etc. Il est impossible de donner une formule les chiffrant précisément.

Les pertes par frottement des balais  $p_{fb}$  sont proportionnelles à la force de pression  $F$  des balais et à la vitesse tangentielle  $v$  :

$$p_{fb} = bFv$$

$b$  est un coefficient de frottement.

Les pertes par ventilation sont également difficiles à calculer.

Pour un moteur donné, les pertes mécaniques ne dépendent que de la vitesse.

#### 5.1.4 Rendement

Le rendement  $\eta$  est le rapport de la puissance utile  $P_u$  à la puissance  $P_a$  appelée par le moteur :

$$\eta = \frac{P_u}{P_a}$$

Il est commode d'exprimer ce rendement en fonction des pertes totales  $p$  et de la puissance  $P_a$  appelée par le moteur :

$$\eta = 1 - \frac{p}{P_a}$$

## 5.2 Échauffement

Les pertes dans une machine électrique entraînent une élévation de la température de ses différentes parties. Ce phénomène dépend directement du régime de fonctionnement imposé.

### 5.2.1 Généralités

#### ■ Causes

Le fonctionnement d'un moteur s'accompagne d'un certain nombre de phénomènes qui conduisent à une transformation d'une partie de l'énergie électrique fournie par son alimentation en chaleur. En premier lieu, les frottements entraînent un échauffement des parties en contact. Par ailleurs, les matériaux ferromagnétiques soumis à des flux variables s'échauffent à cause des courants de Foucault et de l'hystérésis. Enfin, et c'est la cause majeure d'échauffement, les courants dans les enroulements provoquent une transformation d'énergie électrique en chaleur par effet Joule.

#### ■ Conséquences

Un échauffement excessif peut amener la détérioration des matériaux isolants utilisés dans le moteur. La limite dépend à la fois de la température et de la durée pendant laquelle elle est atteinte. La durée de vie d'un moteur dépend de façon notable des échauffements qu'il subit.

## 5.2.2 Étude générale des échanges thermiques

### ■ Lois de base

On considère un corps homogène source de chaleur, par exemple un bobinage parcouru par un courant. Sous l'effet de l'apport d'une puissance  $P$ , deux phénomènes se produisent. En premier lieu, la température du corps s'élève. La quantité de chaleur  $\delta Q_1$  nécessaire pour que la température  $\theta$  d'un corps de masse  $m$  et de chaleur massique  $c$  augmente de  $d\theta$  est :

$$\delta Q_1 = mc d\theta$$

En second lieu, une certaine quantité de chaleur est cédée au milieu extérieur. Ce transfert peut se faire suivant trois processus distincts : la conduction (transmission sans mouvement de matière), la convection (déplacement d'un fluide) et le rayonnement (émission d'énergie électromagnétique). L'un ou l'autre de ces trois phénomènes peut être prépondérant suivant les conditions du transfert thermique. Dans le cas de la conduction, la puissance  $P_e$  cédée est proportionnelle à l'écart de température entre le corps ( $\theta$ ) et le milieu ambiant ( $\theta_a$ ) :

$$P_e = hS(\theta - \theta_a)$$

$S$  est la surface d'échange et  $h$  le coefficient de transmission thermique. Lorsque le transfert ne se fait pas uniquement par conduction, on obtient une caractéristique thermique non linéaire (*figure 5.11*). Cela signifie que les déperditions de chaleur augmentent d'autant plus que l'échauffement est élevé. Toutefois, lorsque l'écart de température n'est pas trop important (quelques dizaines de degrés), on peut procéder à une linéarisation de la courbe (en traits interrompus sur la figure) et continuer à employer la relation de proportionnalité utilisée pour les phénomènes de conduction. Le coefficient  $h$  ne peut être considéré comme constant que dans des conditions de refroidissement données. Si la loi précédente est valable, la quantité de chaleur  $\delta Q_2$  cédée pendant une durée élémentaire  $dt$  s'exprime par :

$$\delta Q_2 = hS(\theta - \theta_a)dt$$

Le bilan énergétique du système conduit à l'équation :

$$\delta Q_1 + \delta Q_2 = P dt$$

soit :

$$mc d\theta + hS(\theta - \theta_a)dt = P dt$$

On arrive donc à une équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$mc \frac{d\theta}{dt} + hS(\theta - \theta_a) = P$$

En considérant l'écart de température  $x = \theta - \theta_a$ , l'équation devient :

$$mc \frac{dx}{dt} + hSx = P$$

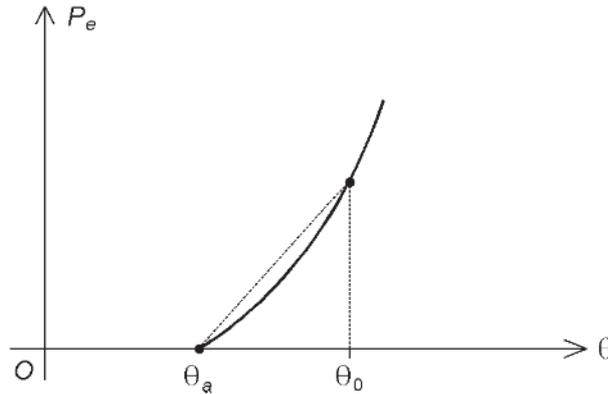


Figure 5.11 – Caractéristique thermique avec sa linéarisation.

### ■ Analogie électrique

Dans la relation précédente, on pose :

$$\mathcal{C} = mc$$

$$\mathcal{G} = hS$$

$\mathcal{C}$  est la capacité calorifique du corps (en joules par kelvin) et  $\mathcal{G}$  est la conductance thermique entre le corps et le milieu ambiant (en watts par kelvin). On utilise souvent son inverse, la résistance thermique (en kelvins par watt) :

$$\mathcal{R} = \frac{1}{\mathcal{G}}$$

L'équation différentielle s'écrit alors :

$$\mathcal{C} \frac{d\theta}{dt} + \mathcal{G}(\theta - \theta_a) = P$$

On constate une analogie formelle entre les phénomènes thermiques et l'électrocinétique. Il suffit en effet de faire les correspondances du tableau 5.1.

Dans ces conditions, l'équation différentielle précédente est celle d'un circuit électrique analogue (figure 5.12). L'intérêt de cette représentation apparaît surtout lorsque les échanges thermiques se produisent entre plusieurs corps. On peut alors tracer des schémas électriques qui traduisent les différentes équations puis raisonner comme en électrocinétique. On utilise la loi des nœuds, la loi des mailles, mais aussi les formules d'association d'éléments en série ou en parallèle, le théorème de Thévenin, etc. Cela facilite beaucoup l'étude et permet à l'électrotechnicien de retrouver des méthodes familières. Il ne faut cependant pas oublier que la réalité physique est un

Tableau 5.1 – Analogie électrique.

Échanges thermiques	Électrocinétique
Puissance thermique $P$	Intensité $i$
Température $\theta$	Potentiel $v$
Différence de température $x = \theta - \theta_a$	Différence de potentiel (tension) $u = u_A - v_B$
Résistance thermique $\mathcal{R}$	Résistance $R$
Conductance thermique $\mathcal{G}$	Conductance $G$
Capacité thermique $\mathcal{C}$	Capacité $C$

peu plus complexe à cause de la non-linéarité de la caractéristique thermique lorsque les phénomènes de convection et de rayonnement sont en jeu. Les résultats obtenus par l'application sans discernement de l'analogie électrique peuvent alors être erronés.

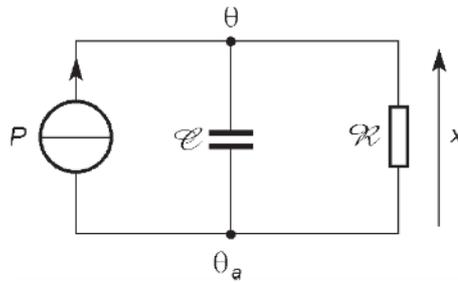


Figure 5.12 – Circuit électrique analogue à un système thermique à un corps.

### 5.2.3 Modélisation thermique des moteurs

#### ■ Machine pouvant être considérée comme un système à un corps

Les moteurs portant l'enroulement d'induit sur leur stator (machines synchrones ou asynchrones) sont pratiquement des systèmes à un corps, la chaleur étant évacuée directement vers le milieu ambiant. De manière approchée, les moteurs à courant continu peuvent également entrer dans ce cadre. Le schéma électrique analogue est alors du premier ordre. On appelle constante de temps thermique du moteur la grandeur :

$$\tau_f = \mathcal{R}\mathcal{C}$$

$\mathcal{R}$  et  $\tau_f$  sont donnés dans la fiche technique de la machine.

#### ■ Machine pouvant être considérée comme un système à deux corps

Dans un moteur à courant continu, la chaleur créée par les bobinages placés sur le rotor est d'abord transmise au stator avant d'atteindre le milieu ambiant. Il faut donc représenter plus précisément le comportement thermique de la machine par un schéma électrique analogue du deuxième ordre (*figure 5.13*). Les résistances ther-

miques sont  $\mathcal{R}_{rs}$  pour l'échange rotor-stator et  $\mathcal{R}_{sa}$  pour l'échange stator-milieu ambiant. Les capacités thermiques sont  $\mathcal{C}_r$  pour le rotor et  $\mathcal{C}_s$  pour le stator. On peut définir deux constantes de temps :

$$\tau_{tr} = \mathcal{R}_{rs} \mathcal{C}_r$$

$$\tau_{ts} = \mathcal{R}_{sa} \mathcal{C}_s$$

$\mathcal{R}_{rs}$ ,  $\mathcal{R}_{sa}$ ,  $\tau_{tr}$  et  $\tau_{ts}$  sont précisés dans la notice du moteur. L'approximation du paragraphe précédent (assimilation à un système à un corps) est valable lorsque  $\tau_{ts}$  est nettement plus faible que  $\tau_{tr}$ . On peut écrire les équations qui correspondent à deux lois des nœuds sur le schéma analogue. Par commodité, on emploie les conductances thermiques plutôt que les résistances :

$$P = \mathcal{C}_r \frac{d\theta_r}{dt} + \mathcal{G}_{rs} (\theta_r - \theta_s)$$

$$0 = \mathcal{C}_s \frac{d\theta_s}{dt} + \mathcal{G}_{sa} (\theta_s - \theta_a) + \mathcal{G}_{rs} (\theta_s - \theta_r)$$

$\theta_r$  et  $\theta_s$  sont les températures du rotor et du stator. On s'intéresse en priorité à l'échauffement du bobinage du rotor. En posant  $x = \theta_r - \theta_a$  et en éliminant  $\theta_s$  entre les deux équations, on arrive à :

$$\mathcal{C}_r \mathcal{C}_s \frac{d^2 x}{dt^2} + (\mathcal{G}_{rs} \mathcal{C}_r + \mathcal{G}_{rs} \mathcal{C}_s + \mathcal{G}_{sa} \mathcal{C}_r) \frac{dx}{dt} + \mathcal{G}_{rs} \mathcal{G}_{sa} x = (\mathcal{G}_{rs} + \mathcal{G}_{sa}) P$$

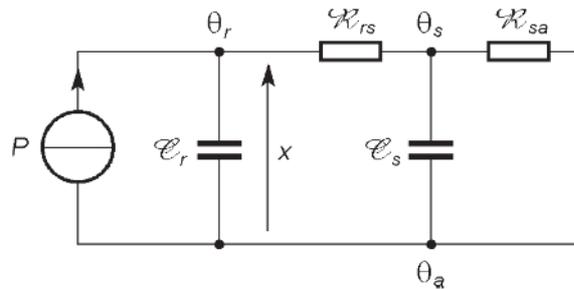


Figure 5.13 – Circuit électrique analogue à un système thermique à deux corps.

## 5.2.4 Régimes de fonctionnement thermique

### ■ Régime continu

On considère que le moteur est utilisé en permanence avec les mêmes conditions de fonctionnement. La puissance  $P$  est donc une constante  $P_0$ . En régime permanent, la température se stabilise à une valeur qui correspond à un échauffement  $x_M$ .

Pour un moteur pouvant être assimilé à un système à un corps, on a :

$$x_M = \mathcal{R} P_0$$

Si le moteur doit être considéré comme un système à deux corps, on a une formule du même type, mais avec :

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_{rs} + \mathcal{R}_{sa}$$

Au départ, quand on applique la puissance  $P_0$  au système en équilibre thermique avec le milieu ambiant, on a un régime transitoire d'échauffement. Avec un système du premier ordre, on doit résoudre l'équation différentielle avec second membre constant :

$$\tau_t \frac{dx}{dt} + x = x_M$$

La solution est exponentielle (*figure 5.14*). La valeur initiale de  $x$  est nulle car l'échauffement ne peut pas présenter de discontinuité du fait de la capacité thermique du moteur :

$$x = x_M \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_t}} \right)$$

Quand on cesse d'appliquer la puissance  $P_0$  au système, il se produit un régime transitoire de refroidissement. L'équation différentielle est alors :

$$\tau_t \frac{dx}{dt} + x = 0$$

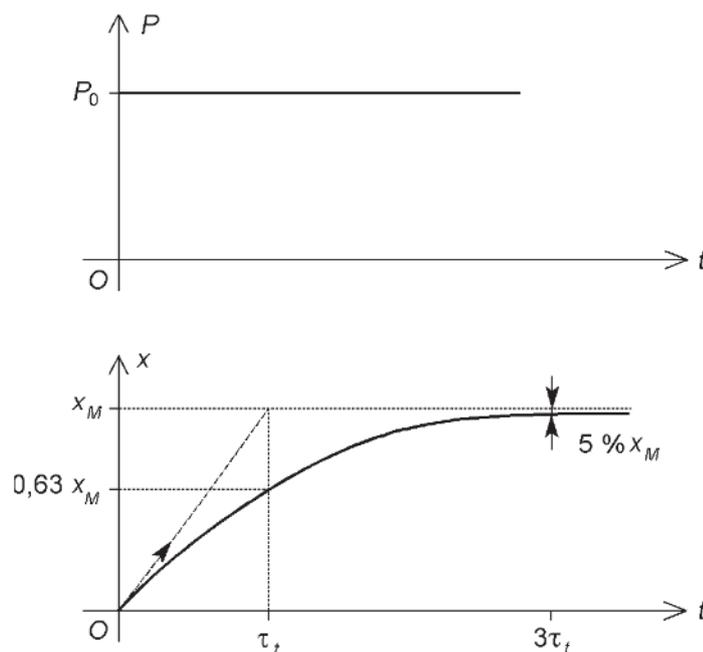


Figure 5.14 – Montée en température d'un système à un corps.

La solution est également exponentielle (figure 5.15) :

$$x = x_M e^{-\frac{t}{\tau_i}}$$

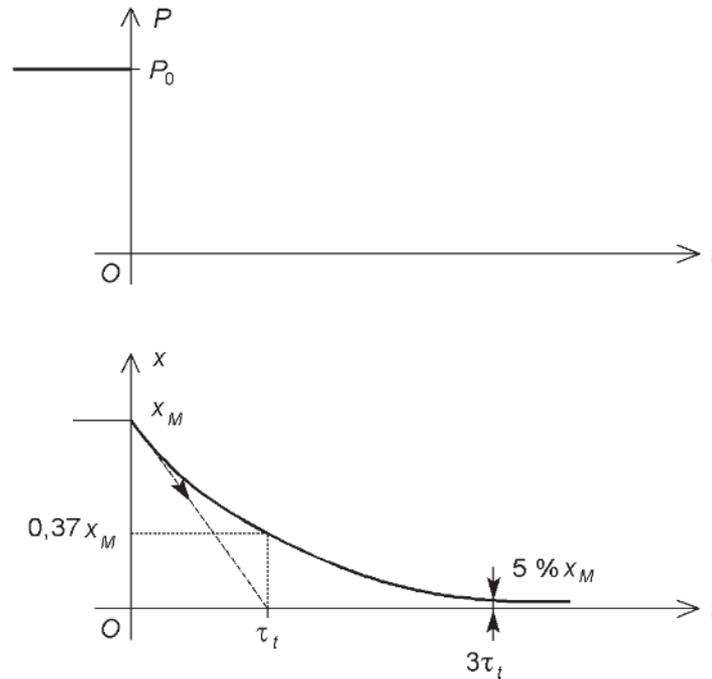


Figure 5.15 – Refroidissement d'un système à un corps.

Si le système doit être considéré comme formé de deux corps, l'équation différentielle est du deuxième ordre. Pour la montée en température, on a :

$$\mathcal{C}_r \mathcal{C}_s \frac{d^2 x}{dt^2} + (\mathcal{G}_{rs} \mathcal{C}_r + \mathcal{G}_{rs} \mathcal{C}_s + \mathcal{G}_{sa} \mathcal{C}_r) \frac{dx}{dt} + \mathcal{G}_{rs} \mathcal{G}_{sa} x = (\mathcal{G}_{rs} + \mathcal{G}_{sa}) P_0$$

L'équation caractéristique est :

$$\mathcal{C}_r \mathcal{C}_s r^2 + (\mathcal{G}_{rs} \mathcal{C}_r + \mathcal{G}_{rs} \mathcal{C}_s + \mathcal{G}_{sa} \mathcal{C}_r) r + \mathcal{G}_{rs} \mathcal{G}_{sa} = 0$$

Son discriminant s'écrit :

$$\Delta = \mathcal{G}_{rs}^2 \mathcal{C}_r^2 + \mathcal{G}_{rs}^2 \mathcal{C}_s^2 + \mathcal{G}_{sa}^2 \mathcal{C}_r^2 + 2\mathcal{G}_{rs}^2 \mathcal{C}_r \mathcal{C}_s + 2\mathcal{G}_{rs} \mathcal{G}_{sa} \mathcal{C}_r^2 + 2\mathcal{G}_{rs} \mathcal{G}_{sa} \mathcal{C}_s \mathcal{C}_r - 4\mathcal{G}_{rs} \mathcal{G}_{sa} \mathcal{C}_r \mathcal{C}_s$$

Soit :

$$\Delta = \mathcal{G}_{rs}^2 \mathcal{C}_r^2 + (\mathcal{G}_s \mathcal{C}_s - \mathcal{G}_{sa} \mathcal{C}_r)^2 + 2\mathcal{G}_{rs}^2 \mathcal{C}_r \mathcal{C}_s + 2\mathcal{G}_{rs} \mathcal{G}_{sa} \mathcal{C}_r^2$$

On constate que  $\Delta$  est toujours positif. L'équation caractéristique a donc deux solutions réelles :

$$r_1 = \frac{-(\mathcal{G}_{rs} \mathcal{C}_r + \mathcal{G}_{rs} \mathcal{C}_s + \mathcal{G}_{sa} \mathcal{C}_r) - \sqrt{\Delta}}{2\mathcal{C}_r \mathcal{C}_s}$$

$$r_2 = \frac{-(\mathcal{G}_{rs} \mathcal{C}_r + \mathcal{G}_{rs} \mathcal{C}_s + \mathcal{G}_{sa} \mathcal{C}_r) + \sqrt{\Delta}}{2\mathcal{C}_r \mathcal{C}_s}$$

Ces deux racines étant négatives, on peut poser :

$$r_1 = -\frac{1}{\tau_1}$$

$$r_2 = -\frac{1}{\tau_2}$$

La solution générale de l'équation sans second membre est alors :

$$x_1 = A e^{-\frac{t}{\tau_1}} + B e^{-\frac{t}{\tau_2}}$$

On obtient la solution de l'équation complète en ajoutant une solution particulière :

$$x_2 = x_M = \mathcal{R}P_0$$

Cela donne :

$$x = A e^{-\frac{t}{\tau_1}} + B e^{-\frac{t}{\tau_2}} + x_M$$

Les deux constantes  $A$  et  $B$  sont imposées par les conditions initiales. D'une part, la valeur de  $x$  à  $t = 0$  est nulle du fait de la capacité thermique du rotor. D'autre part, l'échauffement initial du stator est également nul à cause de la capacité thermique de cette armature. On en déduit la valeur de la dérivée de  $x$  à partir de la première loi des nœuds écrite plus haut pour le schéma analogue :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{P_0}{\mathcal{C}_r}$$

On obtient donc deux équations pour  $A$  et  $B$  :

$$A + B + x_M = 0 \quad -\frac{A}{\tau_1} - \frac{B}{\tau_2} = \frac{P_0}{\mathcal{C}_r}$$

La résolution de ce système d'équations donne les valeurs de  $A$  et  $B$ . On peut alors tracer la courbe de  $x$  en fonction de  $t$  (figure 5.16).

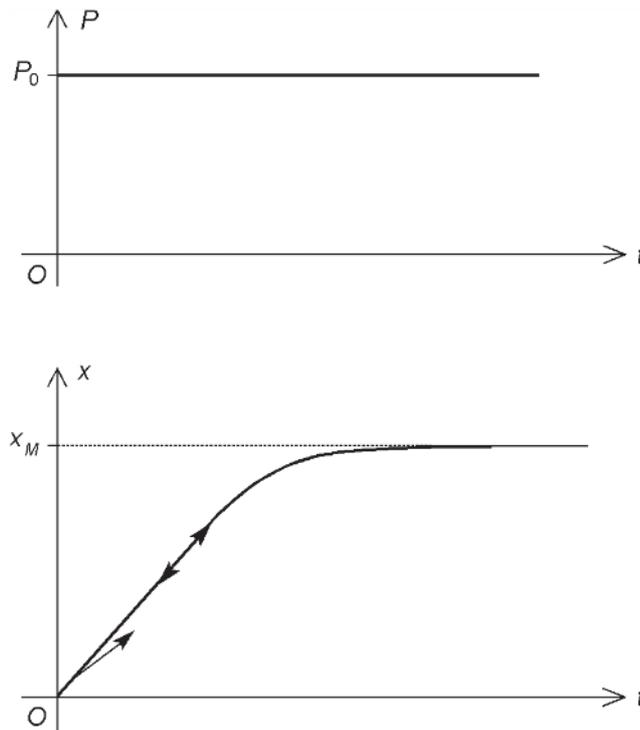


Figure 5.16 – Montée en température d'un système à deux corps.

Dans tous les cas, on constate que les conditions les plus défavorables pour l'échauffement sont obtenues en régime permanent. Il suffit donc de considérer ce dernier lors de la conception du dispositif.

### ■ Régime temporaire

Beaucoup de moteurs électriques ne fonctionnent pas en continu. L'échauffement se produit pendant des durées limitées suivies de phases de refroidissement. Lorsque la température du moteur revient pratiquement à la température du milieu, on qualifie le régime de fonctionnement de temporaire. La montée en température s'interrompt avant que l'asymptote ne soit atteinte (*figure 5.17*). La valeur maximale de  $x$  dépend de la durée  $d$  de la phase d'échauffement. En considérant un système à un corps, on a :

$$x_{\max} = x_M \left( 1 - e^{-\frac{d}{\tau_t}} \right)$$

En régime temporaire, on peut utiliser une puissance plus grande qu'en régime permanent. Si  $P_0$  est la puissance en régime continu qui permet d'atteindre l'échauffement maximal  $x_M$ , on peut déterminer la puissance  $P'_0$  qui peut être utilisée pendant une durée  $d$ . L'ordonnée de l'asymptote visée est :

$$x'_M = x_M \frac{P'_0}{P_0}$$

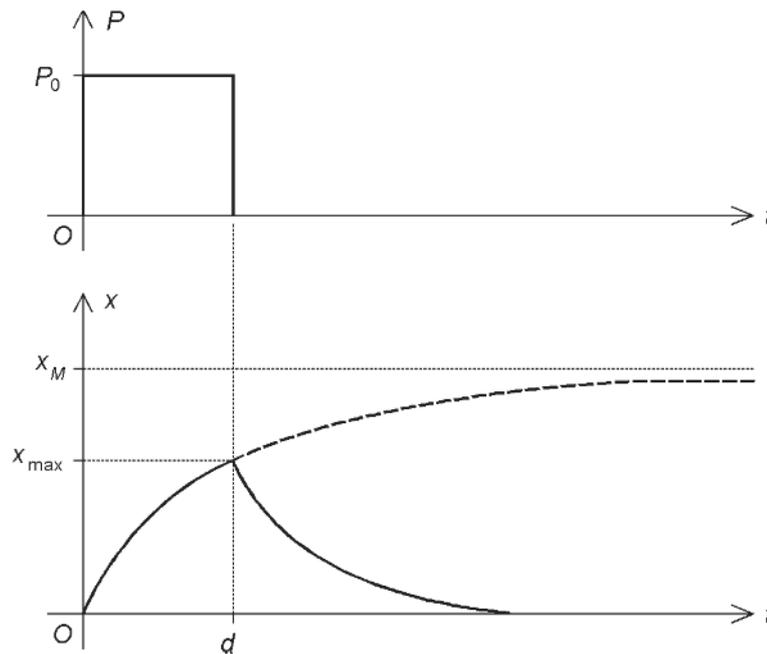


Figure 5.17 – Échauffement en régime temporaire.

En tolérant le même échauffement maximal  $x_M$ , on a :

$$x_M = x_M \frac{P'_0}{P_0} \left(1 - e^{-\frac{d}{\tau_t}}\right)$$

On en déduit :

$$P'_0 = \frac{P_0}{1 - e^{-\frac{d}{\tau_t}}}$$

Inversement, on peut calculer la durée  $d$  pendant laquelle on accepte une surcharge correspondant à la puissance  $P'_0$  :

$$d = \tau_t \ln \frac{P'_0}{P'_0 - P_0}$$

### ■ Régime intermittent

Dans ce cas, le cycle de fonctionnement est périodique. Chaque période  $T$  comprend une phase de durée  $t_1$  pendant laquelle la puissance est constante et une phase de repos de durée  $t_2$ . On chiffre l'importance relative des phases de travail par le facteur de marche :

$$\alpha = \frac{t_1}{T}$$

Lorsque la puissance constante  $P_0$  est appliquée, l'écart de température augmente exponentiellement vers l'asymptote d'ordonnée  $x_M$ . Pendant les phases de repos, l'écart de température diminue exponentiellement avec comme asymptote l'axe des temps. Lors du régime transitoire de montée en température, les points de départ des différentes phases sont tous différents (figure 5.18). En considérant un système à un corps, la mise en équation des exponentielles permet d'écrire des relations concernant les minimums et les maximums relatifs de la fonction :

$$x_1 = x_M \left( 1 - e^{-\frac{t_2}{\tau_i}} \right)$$

$$x'_1 = x_1 e^{-\frac{t_2}{\tau_i}}$$

$$x_2 = (x'_1 - x_M) e^{-\frac{t_1}{\tau_i}} + x_M$$

$$x'_2 = x_2 e^{-\frac{t_2}{\tau_i}}$$

...

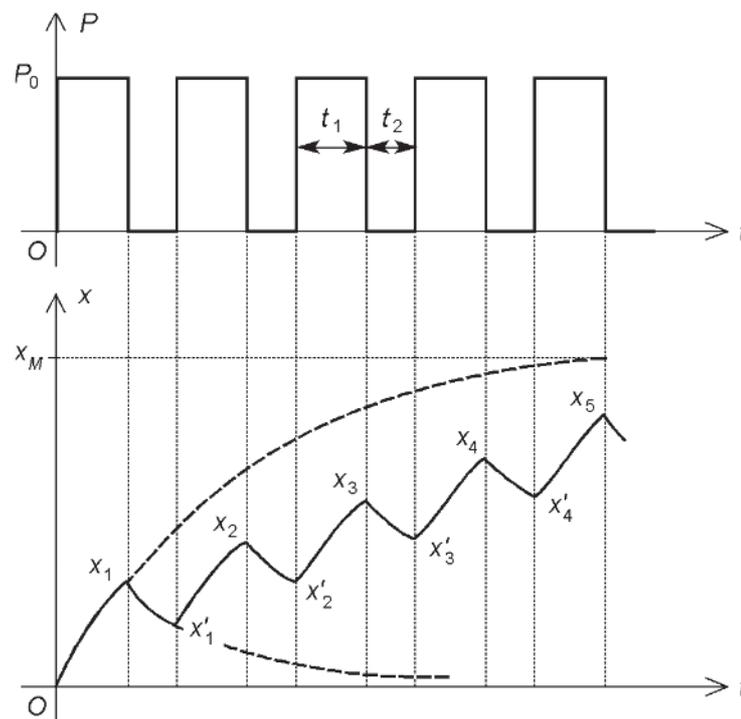


Figure 5.18 – Échauffement en régime intermittent (montée en température).

De façon générale, on peut donner deux relations de récurrence liant les suites  $(x_n)$  et  $(x'_n)$  :

$$x_n = (x'_{n-1} - x_M)e^{-\frac{t_1}{\tau_t}} + x_M = x_1 + x'_{n-1}e^{-\frac{t_1}{\tau_t}}$$

$$x'_n = x_n e^{-\frac{t_2}{\tau_t}}$$

En combinant ces deux formules, on obtient une relation de récurrence pour  $(x_n)$  :

$$x_n = x_1 + x_{n-1}e^{-\frac{T}{\tau_t}}$$

Si la suite converge vers une limite  $X$ , celle-ci doit vérifier la relation :

$$X = x_1 + Xe^{-\frac{T}{\tau_t}}$$

On en déduit :

$$X = \frac{x_1}{1 - e^{-\frac{T}{\tau_t}}} = x_M \frac{1 - e^{-\frac{t_1}{\tau_t}}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau_t}}}$$

Pour démontrer la convergence, il suffit d'écrire par différence des relations précédentes :

$$x_n - X = (x_{n-1} - X)e^{-\frac{T}{\tau_t}}$$

$$x_{n-1} - X = (x_{n-2} - X)e^{-\frac{T}{\tau_t}}$$

$$\dots$$

$$x_2 - X = (x_1 - X)e^{-\frac{T}{\tau_t}}$$

On en déduit :

$$x_n - X = (x_1 - X)e^{-\frac{(n-1)T}{\tau_t}}$$

Lorsque  $n$  tend vers l'infini, l'exponentielle tend vers 0 : la suite  $(x_n)$  converge donc vers  $X$ . À partir des équations liant les deux suites, on montre que  $(x'_n)$  converge vers une limite  $X'$  qui s'exprime par :

$$X' = X e^{-\frac{t_2}{\tau_t}} = x_M \frac{1 - e^{-\frac{t_1}{\tau_t}}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau_t}}} e^{-\frac{t_2}{\tau_t}}$$

Il résulte de ce qui précède que l'échauffement en régime permanent évolue entre deux valeurs extrêmes  $X$  et  $X'$  (figure 5.19). En admettant dès le départ que l'échauffement en régime permanent est une fonction périodique, on peut trouver plus simplement les expressions des deux limites. Il suffit d'écrire les équations des deux branches d'exponentielles de chaque période, ce qui donne :

$$X = (X' - x_M) e^{-\frac{t_1}{\tau_t}} + x_M$$

$$X' = X e^{-\frac{t_2}{\tau_t}}$$

Le cas le plus défavorable pour l'échauffement est le régime permanent : c'est donc la valeur maximale  $X$  qu'il faut considérer. Dans de nombreux cas, la période  $T$  du cycle est beaucoup plus faible que la constante de temps thermique  $\tau_t$ . On peut alors approcher les exponentielles par leur développement limité au premier ordre :

$$X \approx x_M \frac{1 - \left(1 - \frac{t_1}{\tau_t}\right)}{1 - \left(1 - \frac{T}{\tau_t}\right)} = x_M \frac{t_1}{T}$$

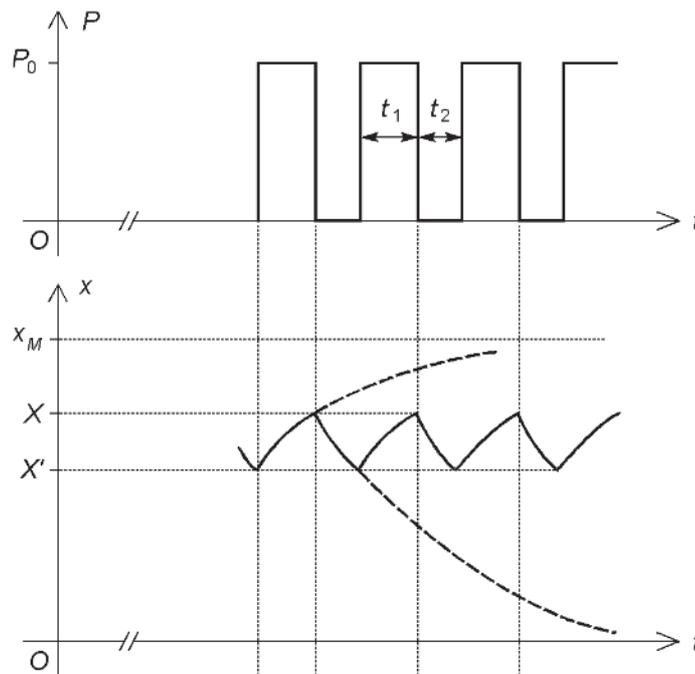


Figure 5.19 – Échauffement en régime intermittent (régime permanent).

Soit :

$$X \approx \alpha x_M$$

On peut donc utiliser une puissance plus importante en régime intermittent qu'en régime continu. Pour un même échauffement maximal  $x_M$ , le moteur supporte une puissance  $P'_0$  telle que :

$$x_M = \alpha x_M \frac{P'_0}{P_0}$$

soit :

$$P'_0 = \frac{P_0}{\alpha}$$

# 6 • TRANSFORMATIONS UTILISÉES DANS L'ÉTUDE DES MOTEURS ALTERNATIFS

Les équations différentielles qui décrivent le fonctionnement des moteurs triphasés en régime quelconque sont compliquées, en particulier parce que leurs coefficients ne sont pas constants. Des transformations mathématiques permettent de passer à des équations différentielles à coefficients constants grâce à des changements de variables. Initialement créées pour l'étude des régimes transitoires des machines triphasées, ces transformations ont vu leur rôle considérablement étendu et sont devenues les outils indispensables pour la commande électronique des moteurs alternatifs.

## 6.1 Transformation triphasé-diphasé

### 6.1.1 Introduction

Un même champ tournant peut être obtenu par une armature triphasée ou une armature diphasée. Considérons un enroulement triphasé a, b, c (*figure 6.1*) et un enroulement diphasé  $\alpha$ ,  $\beta$  (*figure 6.2*) dont l'axe  $O\alpha$  est confondu avec  $Oa$ . Les deux systèmes doivent créer la même tension magnétique d'entrefer. Celle-ci est égale à la somme des tensions magnétiques produites par les différentes phases, elles-mêmes proportionnelles aux courants qui les ont engendrées :

$$\mathcal{U} = A(i_a + i_b + i_c) = A'(i_\alpha + i_\beta)$$

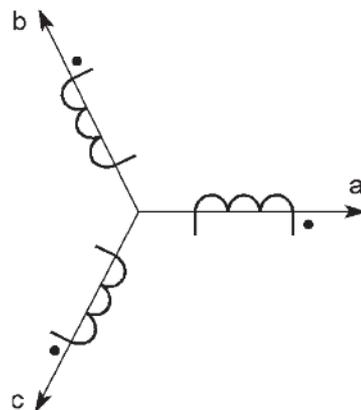


Figure 6.1 – Enroulement triphasé.

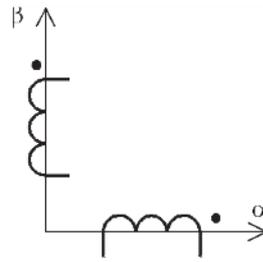


Figure 6.2 – Enroulement diphasé.

Les constantes  $A$  et  $A'$  sont liées aux nombres de spires des enroulements. Représentons le diagramme vectoriel spatial des tensions magnétiques d'entrefer pour les deux armatures (figure 6.3).

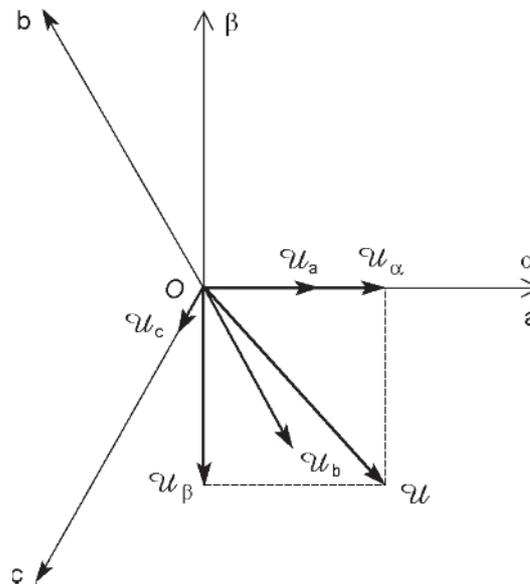


Figure 6.3 – Diagramme spatial des tensions magnétiques d'entrefer pour une armature triphasée et une armature diphasée.

Pour que les systèmes soient équivalents, il suffit que les projections des sommes vectorielles représentant la tension magnétique d'entrefer soient identiques dans les deux cas. Le plus simple est de choisir les axes  $O\alpha$  et  $O\beta$  pour lesquels nous obtenons :

$$A' i_{\alpha} = A i_a - \frac{1}{2} A i_b - \frac{1}{2} A i_c$$

$$A' i_{\beta} = \frac{\sqrt{3}}{2} A i_b - \frac{\sqrt{3}}{2} A i_c$$

et donc :

$$i_{\alpha} = \frac{A}{A'} \left( i_a - \frac{1}{2} i_b - \frac{1}{2} i_c \right)$$

$$i_{\beta} = \frac{A}{A'} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} i_b - \frac{\sqrt{3}}{2} i_c \right)$$

La constante  $\frac{A}{A'}$  peut être choisie arbitrairement (le nombre de spires de l'enroulement diphasé n'est pas fixé pour l'instant).

Par ailleurs, le système d'équations n'est pas inversible. Pour y remédier, ajoutons au système diphasé une composante supplémentaire  $i_b$ , proportionnelle à la somme des courants triphasés :

$$i_b = K(i_a + i_b + i_c)$$

Cette composante ne participe pas à la création de la tension magnétique d'entrefer. De ce fait, le coefficient  $K$  peut être choisi arbitrairement.

Suivant les contraintes que l'on se fixe pour le choix des constantes  $\frac{A}{A'}$  et  $K$ , deux transformations différentes peuvent être définies : la transformation de Clarke et la transformation de Concordia.

### 6.1.2 Transformation de Clarke

Edith Clarke a proposé la première transformation permettant le passage du triphasé au diphasé. Elle porte aujourd'hui son nom.

Pour la transformation de Clarke, le choix de la constante  $\frac{A}{A'}$  est tel qu'en régime sinusoïdal permanent équilibré, l'amplitude des composantes  $i_{\alpha}$  et  $i_{\beta}$  soit la même que celle des grandeurs initiales  $i_a$ ,  $i_b$  et  $i_c$ . On écrit donc :

$$i_a = I_M \cos \omega t$$

$$i_b = I_M \cos \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$i_c = I_M \cos \left( \omega t + \frac{2\pi}{3} \right)$$

et :

$$i_{\alpha} = I_M \cos \omega t$$

$$i_{\beta} = I_M \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

En remplaçant dans les relations du paragraphe précédent, on obtient la condition :

$$\frac{A}{A'} = \frac{2}{3}$$

Pour le coefficient  $K$ , on choisit la valeur  $\frac{1}{3}$  pour avoir la même expression que pour la composante homopolaire dans la méthode des composantes symétriques de Fortescue (avec la différence qu'il s'agit ici de valeurs instantanées pour des signaux quelconques alors que les composantes symétriques sont des grandeurs complexes en régime sinusoïdal permanent).

Compte tenu de ces choix, les relations deviennent :

$$i_\alpha = \frac{2}{3} \left( i_a - \frac{1}{2} i_b - \frac{1}{2} i_c \right)$$

$$i_\beta = \frac{2}{3} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} i_b - \frac{\sqrt{3}}{2} i_c \right)$$

$$i_h = \frac{1}{3} (i_a + i_b + i_c)$$

La transformation de Clarke généralise ces expressions. À un système triphasé  $x_a$ ,  $x_b$ ,  $x_c$  de trois grandeurs (qui peuvent être des courants, des tensions, des flux totalisés), elle associe trois composantes  $x_\alpha$ ,  $x_\beta$ ,  $x_h$  définies sous forme matricielle par :

$$\begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \\ x_h \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix}$$

soit, sous forme abrégée :

$$\mathbf{X}_C = \mathbf{C}_0 \mathbf{X}$$

en posant :

$$\mathbf{X}_C = \begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \\ x_h \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_0 = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_0^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

La transformation de Clarke a un inconvénient : elle n'assure pas l'invariance de la puissance instantanée.

### 6.1.3 Transformation de Concordia

Dans ses études sur la machine synchrone, Charles Concordia a développé une autre transformation. Elle porte aujourd'hui son nom.

Pour assurer l'invariance de la puissance instantanée, il faut que la matrice  $\mathbf{C}$  de la transformation soit orthogonale, c'est-à-dire que son inverse  $\mathbf{C}^{-1}$  soit égale à sa transposée  ${}^t\mathbf{C}$ . En effet, la puissance électrique instantanée, exprimée avec les composantes transformées est alors :

$$p_e = {}^t\mathbf{V}_C \mathbf{I}_C = {}^t(\mathbf{C}\mathbf{V})(\mathbf{C}\mathbf{I})$$

$$p_e = {}^t\mathbf{V}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{I} = {}^t\mathbf{V}\mathbf{I}$$

Il s'agit bien de la puissance instantanée exprimée avec les grandeurs d'origine. Ce résultat peut être obtenu en modifiant les coefficients par rapport à la transformation d'origine :

$$\mathbf{C} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{3}{2}} & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\sqrt{\frac{3}{2}} & 1 \end{bmatrix}$$

## 6.2 Transformation de Park

### 6.2.1 Introduction

Les transformations de Clarke et de Concordia apportent une simplification importante dans l'étude des circuits triphasés. Cependant, dans le cas des machines tournantes, les coefficients des équations différentielles sont toujours variables. Il faut faire appel à d'autres transformations, utilisant une matrice de passage à termes variables, pour aboutir à une description des machines tournantes par des équations différentielles à coefficients constants.

Au lieu de prendre un enroulement diphasé fixe  $\alpha$ ,  $\beta$ , on choisit maintenant un enroulement diphasé tournant  $d$ ,  $q$ , dont l'axe  $Od$  fait un angle  $\xi$  par rapport à l'axe  $O\alpha$  (figure 6.4). Cet angle  $\xi$  peut être fonction du temps pour faire tourner l'enroulement.

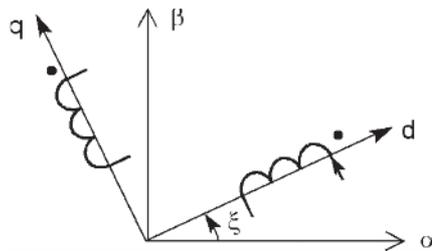


Figure 6.4 – Enroulement diphasé tournant.

Représentons le diagramme vectoriel spatial des tensions magnétiques d'entrefer pour les deux armatures (figure 6.5).

Pour que les systèmes soient équivalents, il suffit que les projections des sommes vectorielles représentant la tension magnétique d'entrefer soient identiques dans les deux cas. Le plus simple est de choisir les axes  $Od$  et  $Oq$  pour lesquels nous obtenons :

$$A'i_d = Ai_a \cos \xi + Ai_b \cos \left( \xi - \frac{2\pi}{3} \right) + Ai_c \cos \left( \xi + \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$A'i_q = -Ai_a \sin \xi - Ai_b \sin \left( \xi - \frac{2\pi}{3} \right) - Ai_c \sin \left( \xi + \frac{4\pi}{3} \right)$$

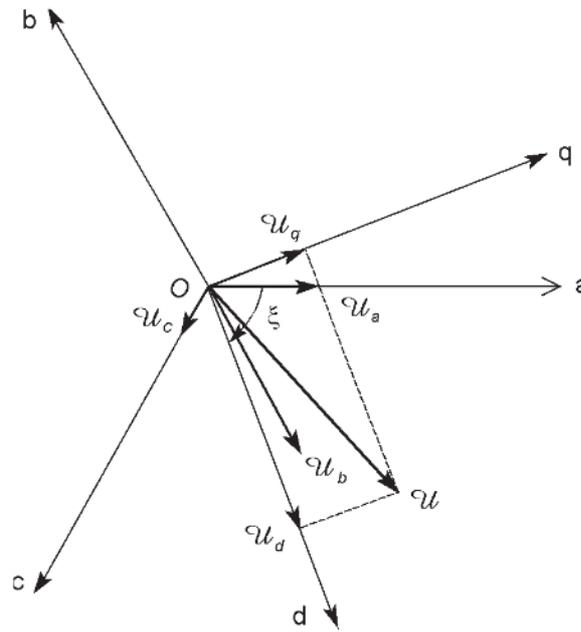


Figure 6.5 – Diagramme spatial des tensions magnétiques d'entrefer pour une armature triphasée et une armature diphasée.

et donc :

$$i_d = \frac{A}{A'} \left[ i_a \cos \xi + i_b \cos \left( \xi - \frac{2\pi}{3} \right) + i_c \cos \left( \xi + \frac{2\pi}{3} \right) \right]$$

$$i_q = \frac{A}{A'} \left[ -i_a \sin \xi - i_b \sin \left( \xi - \frac{2\pi}{3} \right) - i_c \sin \left( \xi + \frac{4\pi}{3} \right) \right]$$

Comme précédemment, la constante  $\frac{A}{A'}$  peut être choisie arbitrairement. Par ailleurs, le système d'équations n'est pas inversible. Pour y remédier, ajoutons au système diphasé la même composante supplémentaire  $i_h$ , proportionnelle à la somme des courants triphasés :

$$i_h = K(i_a + i_b + i_c)$$

Cette composante ne participe pas à la création de la tension magnétique d'entrefer. De ce fait, le coefficient  $K$  peut être choisi arbitrairement.

Suivant les contraintes fixées pour le choix des constantes  $\frac{A}{A'}$  et  $K$ , deux transformations différentes peuvent être définies : la transformation de Park initiale et la transformation de Park modifiée.

### 6.2.2 Transformation de Park initiale

Robert H. Park a proposé en 1929 une nouvelle transformation dans un article très connu<sup>1</sup>.

Dans la transformation de Park initiale, les choix de la constante  $\frac{A}{A'}$  et du coefficient  $K$  sont les mêmes que pour la transformation de Clarke. Ainsi, en régime sinusoïdal permanent équilibré, l'amplitude des composantes  $i_d$  et  $i_q$  est la même que celle des grandeurs initiales  $i_a$ ,  $i_b$  et  $i_c$ .

De façon générale, la transformation de Park associe à des grandeurs triphasées  $x_a$ ,  $x_b$ ,  $x_c$  (qui peuvent être des courants, des tensions, des flux totalisés) trois composantes :

- la composante d'axe direct  $x_d$  ;
- la composante d'axe en quadrature  $x_q$  ;
- la composante homopolaire  $x_h$ .

La relation est écrite sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} x_d \\ x_q \\ x_h \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos \xi & \cos\left(\xi - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\xi + \frac{2\pi}{3}\right) \\ -\sin \xi & -\sin\left(\xi - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\xi + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix}$$

soit, en abrégé :

$$X_p = P_0 X$$

Le retour aux grandeurs d'origine se fait par la transformation inverse :

$$\begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \xi & -\sin \xi & 1 \\ \cos\left(\xi - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\xi - \frac{2\pi}{3}\right) & 1 \\ \cos\left(\xi + \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\xi + \frac{2\pi}{3}\right) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_d \\ x_q \\ x_h \end{bmatrix}$$

soit, en abrégé :

$$X = P_0^{-1} X_p$$

1. *Two reactions theory of synchronous machines*, Trans. AIEE vol. 48, juillet 1929, pp. 716-727.

### 6.2.3 Transformation de Park modifiée

La transformation de Park a le même inconvénient que la transformation de Clarke : elle n'assure pas l'invariance de la puissance instantanée. Le remède est une modification des coefficients comme pour la transformation de Concordia :

$$\mathbf{P} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \xi & \cos\left(\xi - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\xi + \frac{2\pi}{3}\right) \\ -\sin \xi & -\sin\left(\xi - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\xi + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{-1} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \xi & -\sin \xi & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos\left(\xi - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\xi - \frac{2\pi}{3}\right) & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos\left(\xi + \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\xi + \frac{2\pi}{3}\right) & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

#### Remarque

Plusieurs autres formes de la transformation peuvent être rencontrées :

- les composantes peuvent être énoncées dans un autre ordre :  $x_b, x_d, x_q$  est souvent utilisé, mais on trouve aussi  $x_q, x_d, x_b$  ;
- le repère  $x_d, x_q$  peut être choisi inverse plutôt que direct, ce qui modifie les signes devant les sinus (cette convention est souvent utilisée dans l'étude de l'alternateur car si le flux est sur un axe, la force électromotrice induite se trouve en quadrature arrière) ;
- la matrice de la transformation peut être définie par le passage des composantes transformées vers les composantes réelles alors que nous avons choisi le passage inverse.

Dans la suite, nous utiliserons systématiquement la transformation de Park sous sa forme modifiée et avec les conventions décrites dans ce paragraphe.

### 6.2.4 Cas du régime sinusoïdal permanent triphasé équilibré

Les tensions appliquées aux trois phases d'un moteur triphasé forment un système triphasé équilibré direct. Leur pulsation est  $\omega$  et leur amplitude commune est  $V_M$  :

$$v_a = V_M \cos \omega t$$

$$v_b = V_M \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$v_c = V_M \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

Appliquons la transformation de Park. La composante directe est :

$$v_d = \sqrt{\frac{2}{3}} V_M \left[ \cos \omega t \cos \xi + \cos \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} \right) \cos \left( \xi - \frac{2\pi}{3} \right) + \cos \left( \omega t + \frac{2\pi}{3} \right) \cos \left( \xi + \frac{2\pi}{3} \right) \right]$$

Les trois produits de fonctions sinusoïdales sont transformés grâce à la formule :

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

Cela donne :

$$\cos \omega t \cos \xi = \frac{1}{2} [\cos(\omega t + \xi) + \cos(\omega t - \xi)]$$

$$\cos \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} \right) \cos \left( \xi - \frac{2\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} \left[ \cos \left( \omega t + \xi + \frac{2\pi}{3} \right) + \cos(\omega t - \xi) \right]$$

$$\cos \left( \omega t + \frac{2\pi}{3} \right) \cos \left( \xi + \frac{2\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} \left[ \cos \left( \omega t + \xi - \frac{2\pi}{3} \right) + \cos(\omega t - \xi) \right]$$

Effectuons ensuite la somme en tenant compte du fait que :

$$\cos x + \cos \left( x - \frac{2\pi}{3} \right) + \cos \left( x + \frac{2\pi}{3} \right) = 0$$

Nous obtenons ainsi :

$$v_d = \sqrt{\frac{3}{2}} V_M \cos(\omega t - \xi)$$

Un calcul analogue permet d'obtenir la composante en quadrature  $v_q$  :

$$v_q = \sqrt{\frac{2}{3}} V_M \left[ -\cos \omega t \sin \xi - \cos \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} \right) \sin \left( \xi - \frac{2\pi}{3} \right) - \cos \left( \omega t + \frac{2\pi}{3} \right) \sin \left( \xi + \frac{2\pi}{3} \right) \right]$$

Les trois produits de fonctions sinusoïdales sont transformés grâce à la formule :

$$\cos a \sin b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) - \sin(a-b)]$$

Cela donne :

$$\cos \omega t \sin \xi = \frac{1}{2} [\sin(\omega t + \xi) - \sin(\omega t - \xi)]$$

$$\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)\sin\left(\xi - \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\left[\sin\left(\omega t + \xi + \frac{2\pi}{3}\right) - \sin(\omega t - \xi)\right]$$

$$\cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)\sin\left(\psi + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\left[\sin\left(\omega t + \xi - \frac{2\pi}{3}\right) - \sin(\omega t - \xi)\right]$$

Effectuons ensuite la somme en tenant compte du fait que la somme de trois fonctions sinusoïdales régulièrement déphasées de  $\frac{2\pi}{3}$  est nulle :

$$\sin x + \sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = 0$$

Nous obtenons ainsi :

$$v_q = \sqrt{\frac{3}{2}} V_M \sin(\omega t - \xi)$$

La composante homopolaire est :

$$v_b = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ \cos \omega t + \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \right]$$

Or, la somme de trois fonctions sinusoïdales régulièrement déphasées de  $\frac{2\pi}{3}$  est nulle :

$$\cos x + \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = 0$$

La composante homopolaire est donc nulle :

$$v_b = 0$$

Les courants qui parcourent les trois phases forment également un système triphasé équilibré de même pulsation  $\omega$ . Leur amplitude commune est  $I_M$  et leur déphasage par rapport à la tension est  $\varphi$  :

$$i_a = I_M \cos(\omega t - \varphi)$$

$$i_b = I_M \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$i_c = I_M \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{2\pi}{3}\right)$$

Le calcul des composantes de Park est identique à celui que nous venons de mener pour les tensions. Cela donne :

$$i_d = \sqrt{\frac{3}{2}} I_M \cos(\omega t - \varphi - \xi)$$

$$i_q = \sqrt{\frac{3}{2}} V_M \sin(\omega t - \varphi - \xi)$$

$$i_h = 0$$

### 6.2.5 Décomposition de la transformation de Park

Le passage de l'enroulement diphasé fixe  $\alpha, \beta$  à l'enroulement diphasé tournant  $d, q$  correspond à une rotation d'angle  $\xi$  (figure 6.6) :

$$\begin{bmatrix} x_d \\ x_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \xi & \sin \xi \\ \sin \xi & -\cos \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{bmatrix}$$

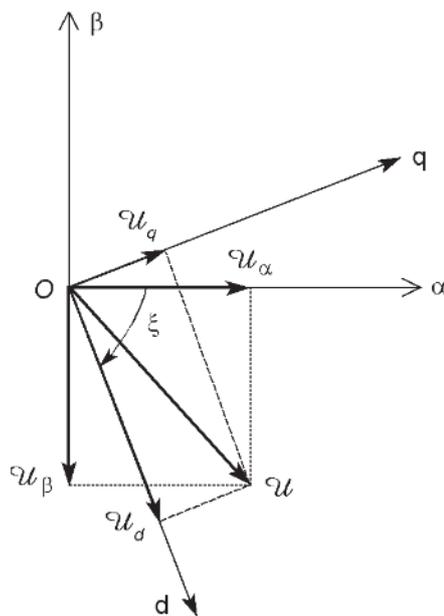


Figure 6.6 – Passage de l'enroulement fixe à l'enroulement tournant.

La transformation modifiée de Park peut être considérée comme la succession de la transformation de Concordia et d'une rotation d'angle  $\xi$ . La composante  $x_h$  n'étant pas affectée par la rotation, nous pouvons écrire :

$$\begin{bmatrix} x_d \\ x_q \\ x_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \xi & \sin \xi & 0 \\ \sin \xi & -\cos \xi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \\ x_h \end{bmatrix}$$

Posons :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \xi & \sin \xi & 0 \\ \sin \xi & -\cos \xi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nous avons ainsi :

$$\mathbf{X}_P = \mathbf{R} \mathbf{X}_C$$

et donc :

$$\mathbf{P} = \mathbf{C} \mathbf{R}$$

De la même façon, la transformation initiale de Park peut être considérée comme la succession de la transformation de Clarke et d'une rotation d'angle  $\xi$ .

## 6.3 Vecteurs d'espace

### 6.3.1 Introduction

#### ■ Vecteur d'espace de la tension magnétique tournante

Au paragraphe 3.3.2, nous avons signalé qu'une tension magnétique tournante  $\mathcal{U} = \mathcal{U}_M \cos(\omega t - p\theta)$  peut être représentée par un vecteur  $\mathcal{U}$ , d'amplitude  $\mathcal{U}_M$ , tournant à la vitesse  $\omega$  et dont la projection sur l'axe repéré par l'angle  $p\theta$  donne l'expression de  $\mathcal{U}$  (figure 6.7).

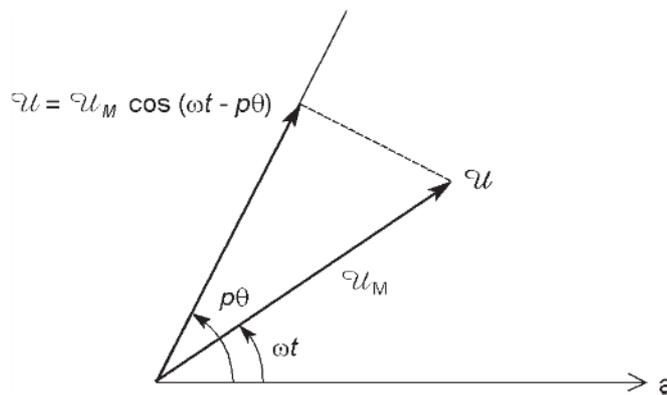


Figure 6.7 – Vecteur d'espace de la tension magnétique tournante.

#### ■ Décomposition en vecteurs associés à chaque phase d'un enroulement triphasé

Toujours au paragraphe 3.3.2, nous avons associé des vecteurs  $\mathcal{U}_a$ ,  $\mathcal{U}_b$  et  $\mathcal{U}_c$  aux tensions magnétiques  $\mathcal{U}_a$ ,  $\mathcal{U}_b$  et  $\mathcal{U}_c$  créées respectivement par les phases a, b et c.

La direction de chaque vecteur est l'axe de la phase considérée. Les mesures algébriques des trois vecteurs sont respectivement  $ki_a$ ,  $ki_b$  et  $ki_c$ . Les expressions des tensions magnétiques sont toujours obtenues par projection des vecteurs correspondants sur l'axe repéré par l'angle  $p\theta$ . Le vecteur d'espace de la tension magnétique résultante est la somme des trois vecteurs associés aux trois phases :

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_a + \mathcal{U}_b + \mathcal{U}_c$$

#### ■ Vecteur d'espace de la tension magnétique créée par un enroulement triphasé parcouru par des courants de forme quelconque

Lorsque les courants  $i_a$ ,  $i_b$  et  $i_c$  ne sont pas sinusoïdaux, on conserve la définition précédente pour les vecteurs  $\mathcal{U}_a$ ,  $\mathcal{U}_b$  et  $\mathcal{U}_c$  et on continue d'obtenir le vecteur d'espace de la tension magnétique résultante en effectuant la somme vectorielle. De façon générale, le vecteur obtenu n'a ni une position fixe, ni une norme constante.

### 6.3.2 Vecteur d'espace du courant

#### ■ Vecteur d'espace des courants triphasés

À partir du vecteur d'espace  $\mathcal{U}$  de la tension magnétique tournante, nous définissons le vecteur d'espace  $\mathbf{i}$  des courants triphasés par :

$$\mathcal{U} = \sqrt{\frac{3}{2}} k \mathbf{i}$$

Le choix du coefficient  $\sqrt{\frac{3}{2}}$  est arbitraire, mais il permet ensuite de se rapprocher de la transformation de Park modifiée. Un autre choix parfois rencontré consiste à donner la valeur  $\frac{3}{2}$  au coefficient pour se rapprocher de la transformation de Park initiale.

#### ■ Décomposition en vecteurs associés à chaque phase d'un enroulement triphasé

Comme pour les vecteurs associés aux tensions magnétiques, nous définirons des vecteurs  $\mathbf{i}_a$ ,  $\mathbf{i}_b$  et  $\mathbf{i}_c$  associés aux courants dans les phases a, b et c en leur donnant comme direction l'axe de la phase considérée et comme mesure algébrique respectivement  $\sqrt{\frac{2}{3}} i_a$ ,  $\sqrt{\frac{2}{3}} i_b$  et  $\sqrt{\frac{2}{3}} i_c$ . Cela conduit aux relations :

$$\mathcal{U}_a = \sqrt{\frac{3}{2}} k \mathbf{i}_a$$

$$\mathcal{U}_b = \sqrt{\frac{3}{2}} k \mathbf{i}_b$$

$$\mathcal{U}_c = \sqrt{\frac{3}{2}} k \mathbf{i}_c$$

Le vecteur d'espace  $\mathbf{i}$  des courants triphasés est égal à la somme des vecteurs associés aux courants dans les phases :

$$\mathbf{i} = \mathbf{i}_a + \mathbf{i}_b + \mathbf{i}_c$$

### 6.3.3 Grandeurs complexes spatiales

#### ■ Grandeur complexe spatiale des courants triphasés

Le plan vectoriel utilisé précédemment peut être associé à un plan complexe. Choisissons l'axe réel sur l'axe de la phase a et l'axe imaginaire qui lui est orthogonal (*figure 6.8*). Associons à chaque vecteur une grandeur complexe dont le module est égal à la norme du vecteur et dont l'argument est égal à l'angle que fait le vecteur avec l'axe de la phase a.

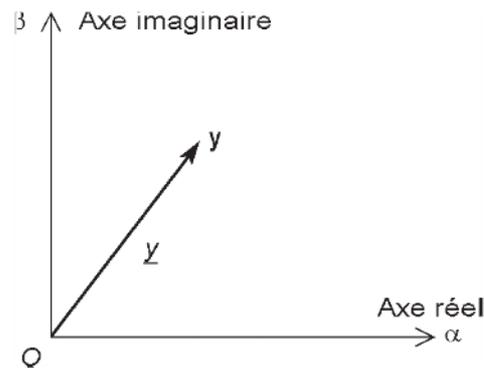


Figure 6.8 – Plan complexe.

Compte tenu de la direction des vecteurs, les grandeurs complexes associées aux courants dans les phases peuvent s'exprimer en fonction des intensités instantanées

$i_a$ ,  $i_b$  et  $i_c$  et du nombre complexe  $a = e^{j\frac{2\pi}{3}}$  :

$$\underline{i}_a = \sqrt{\frac{2}{3}} i_a$$

$$\underline{i}_b = \sqrt{\frac{2}{3}} a i_b$$

$$\underline{i}_c = \sqrt{\frac{2}{3}} a^2 i_c$$

La grandeur complexe spatiale  $\underline{i}$  associée au vecteur d'espace  $\mathbf{i}$  peut s'exprimer en fonction des grandeurs complexes  $\underline{i}_a$ ,  $\underline{i}_b$  et  $\underline{i}_c$  associées aux vecteurs  $\mathbf{i}_a$ ,  $\mathbf{i}_b$  et  $\mathbf{i}_c$  :

$$\underline{i} = \underline{i}_a + \underline{i}_b + \underline{i}_c$$

soit :

$$\underline{i} = \sqrt{\frac{2}{3}} (i_a + ai_b + a^2 i_c)$$

### ■ Expression de la tension magnétique d'entrefer

La tension magnétique d'entrefer produite par un enroulement triphasé parcouru par des courants de forme quelconque est :

$$\mathcal{U} = k \left[ i_a \cos p\theta + i_b \cos \left( p\theta - \frac{2\pi}{3} \right) + i_c \cos \left( p\theta + \frac{2\pi}{3} \right) \right]$$

Utilisons la formule d'Euler :

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

Nous obtenons :

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} k \left( i_a e^{jp\theta} + i_a e^{-jp\theta} + i_b e^{j\left(p\theta - \frac{2\pi}{3}\right)} + i_b e^{-j\left(p\theta - \frac{2\pi}{3}\right)} + i_c e^{j\left(p\theta + \frac{2\pi}{3}\right)} + i_c e^{-j\left(p\theta + \frac{2\pi}{3}\right)} \right)$$

Introduisons le nombre complexe  $a$  et regroupons les termes :

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} k [(i_a + a^2 i_b + ai_c) e^{jp\theta} + (i_a + ai_b + a^2 i_c) e^{-jp\theta}]$$

Remarquons que le second terme est le conjugué du premier. Comme la somme d'un nombre complexe et de son conjugué est égale au double de leur partie réelle, nous arrivons à :

$$\mathcal{U} = k \operatorname{Re}[(i_a + ai_b + a^2 i_c) e^{-jp\theta}]$$

Nous pouvons alors faire apparaître la grandeur complexe spatiale des courants triphasés :

$$\mathcal{U} = \sqrt{\frac{3}{2}} k \operatorname{Re}(i e^{-jp\theta})$$

### ■ Généralisation

Il est possible d'associer une grandeur complexe spatiale à tous les systèmes triphasés utilisés dans l'étude des machines : courants, tensions, flux totaux, champs magnétiques. Bien qu'il n'y ait pas la même origine physique pour les grandeurs autres que les courants, la formule de définition reste la même. Ainsi, pour un système triphasé  $y_a, y_b, y_c$ , la grandeur complexe spatiale est :

$$\underline{y} = \sqrt{\frac{2}{3}} (y_a + ay_b + a^2y_c)$$

Aucune hypothèse n'est faite sur la variation temporelle des grandeurs considérées. À cette grandeur complexe  $\underline{y}$ , il est également possible d'associer un vecteur d'espace  $\mathbf{y}$  dont la norme est le module de la grandeur complexe et qui fait un angle avec l'axe de référence égal à l'argument de la grandeur complexe. La représentation graphique des vecteurs d'espace est appelée diagramme d'espace ou diagramme spatial.

Inversement, le passage de la grandeur complexe spatiale aux valeurs instantanées se fait par les formules suivantes :

$$y_a = \sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{Re} \underline{y}$$

$$y_b = \sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{Re}(a^2 \underline{y})$$

$$y_c = \sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{Re}(a \underline{y})$$

Pour démontrer la première formule, remplaçons  $a$  et  $a^2$  par leur expression cartésienne :

$$a = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a^2 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Cela conduit à :

$$\underline{y} = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[ y_a - \frac{1}{2}(y_b + y_c) + j\frac{\sqrt{3}}{2}(y_b - y_c) \right]$$

Le système triphasé n'ayant pas de composante homopolaire, la somme des trois valeurs instantanées est nulle :

$$y_a + y_b + y_c = 0$$

Nous obtenons bien :

$$\operatorname{Re} \underline{y} = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[ y_a - \frac{1}{2} (-y_a) \right] = \sqrt{\frac{3}{2}} y_a$$

Pour démontrer la deuxième formule, effectuons le produit de la grandeur complexe par  $a^2$  en tenant compte que  $a^3 = 1$  :

$$a^2 \underline{y} = \sqrt{\frac{2}{3}} (a^2 y_a + y_b + a y_c)$$

Remplaçons ensuite  $a$  et  $a^2$  par leurs expressions cartésiennes :

$$a^2 \underline{y} = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[ -\frac{1}{2} (y_a + y_c) + y_b + j \frac{\sqrt{3}}{2} (y_c - y_a) \right]$$

Compte tenu de l'absence de composante homopolaire, nous avons bien :

$$\operatorname{Re}(a^2 \underline{y}) = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[ -\frac{1}{2} (-y_b) + y_b \right] = \sqrt{\frac{3}{2}} y_b$$

La démarche est identique pour démontrer la troisième formule :

$$a \underline{y} = \sqrt{\frac{2}{3}} (a y_a + a^2 y_b + y_c)$$

$$a \underline{y} = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[ -\frac{1}{2} (y_a + y_b) + y_c + j \frac{\sqrt{3}}{2} (y_a - y_b) \right]$$

Nous obtenons bien :

$$\operatorname{Re}(a \underline{y}) = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[ -\frac{1}{2} (-y_c) + y_c \right] = \sqrt{\frac{3}{2}} y_c$$

### ■ Grandeurs complexes spatiales en régime sinusoïdal permanent

Considérons un système triphasé équilibré direct :

$$y_a = Y_M \cos \omega t$$

$$y_b = Y_M \cos \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$y_c = Y_M \cos \left( \omega t + \frac{2\pi}{3} \right)$$

En régime sinusoïdal permanent, des grandeurs complexes sont associées aux fonctions du temps. Leur module est la valeur efficace  $Y$  de la grandeur et leur argument est la phase à l'instant initial :

$$\begin{aligned}\underline{Y}_a &= Y \\ \underline{Y}_b &= a^2 Y \\ \underline{Y}_c &= a Y\end{aligned}$$

Pour un système équilibré, il suffit de considérer une seule des trois grandeurs de chaque système triphasé car les autres conduisent aux mêmes relations. C'est cette remarque qui conduit au schéma monophasé équivalent utilisé pour l'étude des machines en régime équilibré. Nous choisirons la grandeur relative à la phase a et nous ne lui affecterons plus d'indice, puisque c'est maintenant la seule à considérer :

$$\underline{Y} = Y$$

Ces grandeurs complexes temporelles, utilisées uniquement pour le régime sinusoïdal permanent, sont liées aux grandeurs complexes spatiales qui, elles, sont utilisées pour un régime de fonctionnement quelconque, ce qui inclue le cas du sinusoïdal. Exprimons maintenant la grandeur complexe spatiale correspondante :

$$\underline{y} = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[ Y_M \cos \omega t + a I_M \cos \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} \right) + a^2 I_M \cos \left( \omega t + \frac{2\pi}{3} \right) \right]$$

Transformons les cosinus par les formules :

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

Cela donne :

$$\underline{y} = \sqrt{\frac{2}{3}} Y_M \left( \cos \omega t + a \cos \omega t \cos \frac{2\pi}{3} + a \sin \omega t \sin \frac{2\pi}{3} + a^2 \cos \omega t \cos \frac{2\pi}{3} - a^2 \sin \omega t \sin \frac{2\pi}{3} \right)$$

Remplaçons les valeurs particulières :

$$\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

En regroupant d'une part les cosinus et d'autre part les sinus, nous obtenons :

$$\underline{y} = \sqrt{\frac{2}{3}} Y_M \left[ \left( 1 - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a^2 \right) \cos \omega t + \frac{\sqrt{3}}{2} (a - a^2) \sin \omega t \right]$$

La formule se simplifie en utilisant le fait que  $1 + a + a^2 = 0$  et en calculant  $a - a^2$  avec les expressions cartésiennes de  $a$  et  $a^2$  :

$$\underline{y} = \sqrt{\frac{2}{3}} Y_M \left[ \left( 1 + \frac{1}{2} \right) \cos \omega t + \frac{\sqrt{3}}{2} \left( -\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \sin \omega t \right]$$

$$\underline{y} = \sqrt{\frac{3}{2}} Y_M (\cos \omega t + j \sin \omega t)$$

ou encore, en introduisant une exponentielle complexe :

$$\underline{y} = \sqrt{\frac{3}{2}} Y_M e^{j\omega t}$$

Cette formule peut aussi s'écrire avec la valeur efficace  $Y$  de la grandeur :

$$\underline{y} = \sqrt{3} Y e^{j\omega t}$$

#### ■ Relation entre vecteurs d'espace et vecteurs de Fresnel

Le vecteur d'espace associé au système triphasé précédent a une norme proportionnelle à l'amplitude  $Y_M$  et il tourne à la vitesse de rotation  $\omega$  à partir d'une position initiale sur l'axe de référence.

La démarche est similaire à celle qui est habituellement utilisée en électricité pour définir les vecteurs de Fresnel. Une fonction sinusoïdale du temps peut être représentée par un vecteur tournant dont la projection sur l'axe de référence donne la valeur instantanée de la grandeur. Ce vecteur a alors une norme égale à l'amplitude  $Y_M$ , il tourne à une vitesse égale à la pulsation  $\omega$  à partir d'une position initiale sur l'axe de référence. Le diagramme de Fresnel est une photographie des vecteurs tournants à l'instant initial. En électricité, on remplace habituellement les amplitudes par des valeurs efficaces qui ont une signification pratique plus directe : il s'agit simplement d'un changement d'échelle de l'ensemble du diagramme puisque la valeur efficace d'une grandeur sinusoïdale est égale à son amplitude divisée par  $\sqrt{2}$ .

Dans le cas des machines tournantes en régime sinusoïdal permanent, les deux représentations coexistent. Nous pouvons alors tracer des vecteurs d'espace dans une représentation appelée diagramme spatial et d'un autre côté des vecteurs de Fresnel dans une représentation appelée diagramme temporel. Les deux diagrammes tournant à la même vitesse  $\omega$ , nous pouvons les superposer. Pour obtenir une même direction pour le vecteur d'espace et le vecteur de Fresnel qui correspondent à une grandeur donnée, il suffit que l'axe de référence soit commun aux deux diagrammes. La relation entre la grandeur complexe spatiale  $\underline{y}$  et la grandeur complexe temporelle  $\underline{Y}$  est alors :

$$\underline{y} = \sqrt{3} \underline{Y} e^{j\omega t}$$

### ■ Changement de repère

Considérons un vecteur d'espace  $\underline{y}$ . En choisissant un axe réel  $O\alpha$  et un axe imaginaire  $O\beta$  dans le plan complexe associé au plan vectoriel, nous pouvons définir la grandeur complexe d'espace  $\underline{y}$ . Considérons maintenant un autre repère  $O\alpha'\beta'$  obtenu à partir du repère précédent  $O\alpha\beta$  par rotation d'un angle  $\xi$  (figure 6.9).

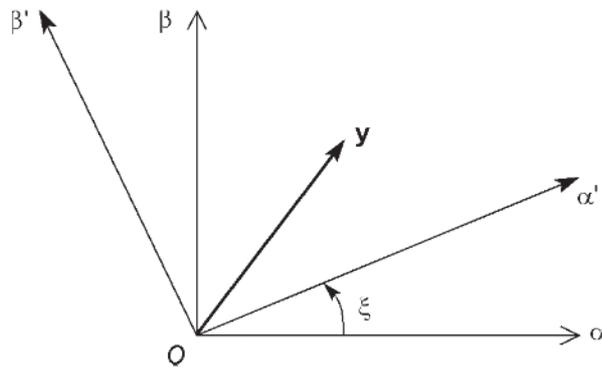


Figure 6.9 – Changement de repère.

En choisissant  $O\alpha'$  comme nouvel axe réel et  $O\beta'$  comme nouvel axe imaginaire, nous pouvons définir une autre grandeur complexe  $\underline{y}'$ . Nous constatons sur la figure que :

$$|\underline{y}| = |\underline{y}'|$$

$$\arg \underline{y} = \arg \underline{y}' + \xi$$

La relation entre les deux grandeurs complexes est ainsi :

$$\underline{y} = \underline{y}' e^{j\xi}$$

ou inversement :

$$\underline{y}' = \underline{y} e^{-j\xi}$$

C'est cette simplicité des formules de changement de repère qui forme un des intérêts essentiels des grandeurs complexes d'espace. L'angle  $\xi$  considéré n'est pas obligatoirement constant et il sera possible par la suite de considérer un repère mobile par rapport à un autre. Selon les besoins, les équations seront écrites dans un repère lié au stator, au rotor, ou encore au champ tournant.

Il faut bien noter que le changement de repère n'affecte pas le vecteur d'espace, mais seulement les représentations complexes associées. Les relations vectorielles que nous écrirons dans la suite sont indépendantes du repère choisi.

Copyright © 2005 Dunod. Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite à l'exception des cas prévus aux termes de l'article L.122-5, 2° et 3° a) du Code de la Propriété Intellectuelle.

# 7 • PRINCIPE ET MODÉLISATION DU MOTEUR ASYNCHRONE

---

Le moteur asynchrone est depuis longtemps la solution la plus répandue pour les machines qui ne sont pas munies d'une variation de vitesse. Son coût modéré et sa robustesse le rendent incontournable dans ce domaine. Les progrès récents dans les domaines de l'alimentation et de la commande en font maintenant une solution souvent retenue pour les machines à vitesse variable.

## 7.1 Généralités

### 7.1.1 Définition

Un moteur asynchrone est un moteur à courant alternatif pour lequel la vitesse de rotation de l'arbre est différente de la vitesse de rotation du champ tournant. La machine qui nous intéresse dans ce chapitre est plus précisément un moteur à induction. Il existe en effet théoriquement d'autres types de moteurs asynchrones. Un moteur à induction est un moteur asynchrone dont le circuit magnétique est associé à deux ou plus de deux circuits électriques se déplaçant l'un par rapport à l'autre et dans lequel l'énergie est transférée de la partie fixe à la partie mobile, ou inversement, par induction électromagnétique. Cependant, le seul moteur asynchrone qui ait une importance pratique est le moteur à induction. En français, le langage courant a consacré l'appellation « moteur asynchrone » tandis qu'en anglais, la dénomination plus exacte de « *induction motor* » a été privilégiée.

### 7.1.2 Symbole

Le moteur asynchrone peut être représenté par son symbole normalisé général (*figure 7.1*) ou par deux autres symboles normalisés indiquant s'il s'agit d'un moteur à cage (*figure 7.2*) ou d'un moteur à rotor bobiné (*figure 7.3*). Les six bornes de l'enroulement statorique peuvent être sorties (*figure 7.4*) ou le couplage de cet enroulement peut être en étoile (*figure 7.5*) ou en triangle (*figure 7.6*). Nous précisons les différences de constitution dans la suite. Les symboles ont été dessinés pour le cas de machines triphasées, qui est de loin le plus fréquent, mais il peut s'adapter pour les machines monophasées ou diphasées, beaucoup plus rares.

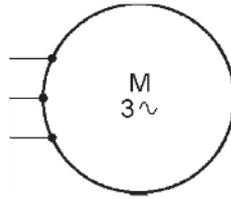


Figure 7.1 – Symbole général d'un moteur asynchrone triphasé.

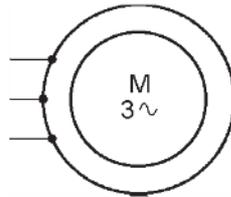


Figure 7.2 – Symbole d'un moteur asynchrone triphasé à cage.

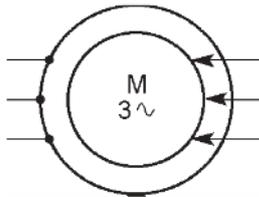


Figure 7.3 – Symbole d'un moteur asynchrone triphasé à rotor bobiné.

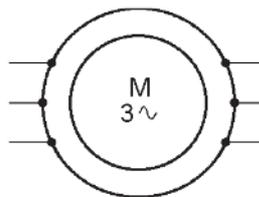


Figure 7.4 – Symbole d'un moteur asynchrone triphasé à six bornes sorties.

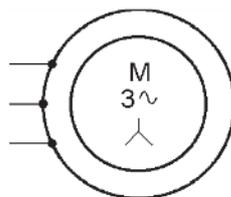


Figure 7.5 – Symbole d'un moteur asynchrone triphasé couplé en étoile.

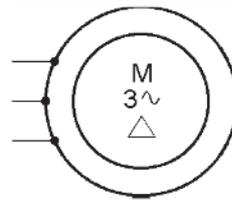


Figure 7.6 – Symbole d'un moteur asynchrone triphasé couplé en triangle.

### 7.1.3 Constitution

#### ■ Stator

Le stator comporte une carcasse en fonte ou en tôle d'acier dans laquelle est inséré un circuit magnétique formé d'un empilage de tôles. Le stator d'un moteur asynchrone triphasé porte un enroulement triphasé réparti dans des encoches du circuit magnétique. Il est généralement couplé en étoile.

#### ■ Rotor

Deux grandes catégories de moteurs asynchrones apparaissent suivant la structure de leur rotor qui peut être bobiné ou à cage. Pour ces deux variantes, le circuit magnétique du rotor est un assemblage de tôles ferromagnétiques muni d'encoches.

#### □ Rotor bobiné

Dans ce cas, les encoches présentes à la périphérie du rotor contiennent un enroulement similaire à celui du stator. Le bobinage rotorique est toujours couplé en étoile et il est accessible de l'extérieur grâce à un système de bagues et de balais, ce qui permet soit de le court-circuiter soit de le relier à un circuit permettant d'agir sur les caractéristiques du moteur dans certains fonctionnements.

#### □ Rotor à cage

Dans ce cas, les encoches contiennent des barres reliées aux deux extrémités par des anneaux de court-circuit. L'ensemble forme une cage d'écureuil (*figure 7.7*).

Les barres sont en alliage d'aluminium pour les machines de petite et moyenne puissance, en cuivre pour les moteurs de forte puissance. L'enroulement ainsi obtenu n'est pas accessible de l'extérieur. La cage rotorique forme un enroulement dont le nombre de phases et le nombre de pôles ne sont pas fixés par construction.

### 7.1.4 Avantages et inconvénients

Le moteur à cage d'écureuil présente en effet de nombreux avantages :

- faible coût de construction ;
- entretien réduit ;
- robustesse.

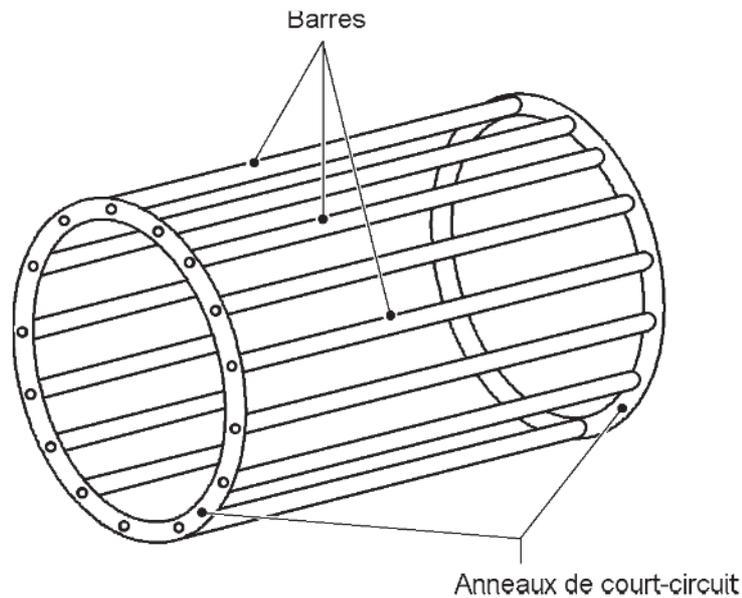


Figure 7.7 – Cage d'écurieil.

Les performances obtenues pour les moteurs reliés directement au secteur sont souvent suffisantes grâce à quelques artifices de construction. L'inconvénient de ne pas pouvoir agir sur les grandeurs rotoriques peut être pallié si nécessaire par les performances des convertisseurs électroniques produisant l'alimentation du stator.

Les moteurs asynchrones à rotor bobiné ont leur intérêt quand par exemple les conditions de démarrage sont particulièrement difficiles. L'action sur les grandeurs rotoriques permet d'améliorer un certain nombre de performances. Néanmoins, le coût plus élevé de la machine et la présence des contacts entre bagues et balais qui entraînent une fiabilité moindre et un entretien plus contraignant, font que la solution du rotor bobiné n'est retenue que dans quelques cas particuliers.

Le rendement des moteurs asynchrones est toutefois moins élevé que celui des moteurs synchrones.

### 7.1.5 Utilisation

Le moteur asynchrone est le moteur industriel par excellence. Les moteurs asynchrones ont, pour leur grande majorité un rotor à cage. Les progrès faits ces dernières années dans l'alimentation et la commande des machines n'ont fait que réduire la part des moteurs asynchrones à rotor bobiné par rapport à leurs homologues à cage d'écurieil.

## 7.2 Principe

L'enroulement statorique, parcouru par un système triphasé équilibré de courants de pulsation  $\omega_s$ , crée une tension magnétique tournante d'entrefer à la vitesse synchrone, soit avec  $p$  paires de pôles :

$$\Omega_S = \frac{\omega_s}{p}$$

Le flux balayant l'enroulement rotorique en court-circuit y induit des courants. L'action du champ magnétique statorique sur ces courants met en mouvement le rotor. La vitesse  $\omega_m$  du rotor est inférieure à la vitesse synchrone  $\Omega_S$ . La différence relative est le glissement  $g$  :

$$g = \frac{\Omega_S - \omega_m}{\Omega_S}$$

La vitesse du champ tournant par rapport au rotor est  $\Omega_S - \omega_m$  et la pulsation  $\omega_r$  des courants rotoriques est alors :

$$\omega_r = p(\Omega_S - \omega_m)$$

soit :

$$\omega_r = g\omega_s$$

Les courants rotoriques de pulsation  $\omega_r$  créent une tension magnétique tournante d'entrefer dont la vitesse par rapport au rotor est  $\frac{\omega_r}{p}$ , c'est-à-dire  $\Omega_S - \omega_m$ . Par rapport au stator, la vitesse de cette tension magnétique tournante d'entrefer est  $\omega_m + (\Omega_S - \omega_m)$ , c'est-à-dire  $\Omega_S$ . Les tensions magnétiques tournantes d'entrefer créées par le stator et par le rotor ont donc même vitesse de rotation  $\Omega_S$ . La tension magnétique tournante d'entrefer réelle est la résultante de ces deux tensions magnétiques créées par le stator et par le rotor.

## 7.3 Modélisation

### 7.3.1 Hypothèses

Un moteur asynchrone à rotor bobiné comporte au stator un enroulement dont les trois phases sont nommées a, b et c et, au rotor un enroulement dont les trois phases sont nommées A, B et C (*figure 7.8*). Si le rotor est une cage d'écureuil, nous l'assimilons pour l'étude au bobinage précédent. Nous précisons plus loin les adaptations à faire dans ce cas.

La modélisation s'appuie sur un certain nombre d'hypothèses :

- la machine présente une parfaite symétrie triphasée de construction ;
- l'entrefer est de largeur constante, l'effet des encoches est négligé ;
- la répartition spatiale des tensions magnétiques d'entrefer est sinusoïdale ;
- le circuit magnétique est linéaire, la saturation, l'hystérésis et les pertes ferromagnétiques ne sont pas pris en compte ;
- les résistances sont constantes, la variation avec la température et l'effet de peau sont ignorés.

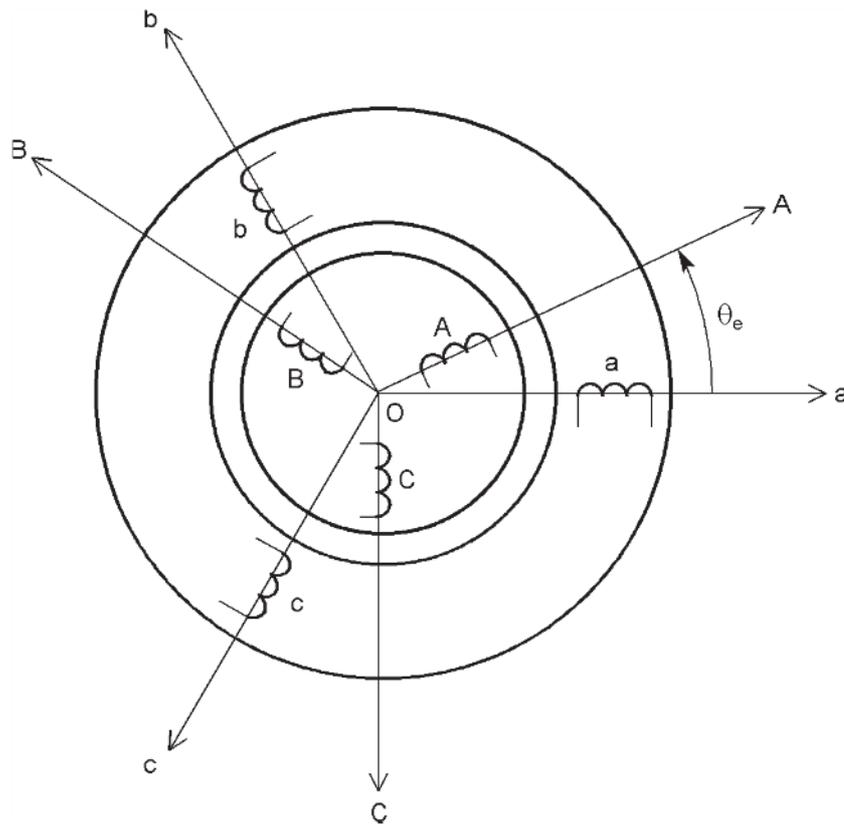


Figure 7.8 – Représentation des enroulements d'un moteur asynchrone dans le plan électrique.

### 7.3.2 Équations électriques

Chaque phase statorique présente une résistance  $R_s$ . Les tensions aux bornes des phases a, b et c sont respectivement appelées  $v_a$ ,  $v_b$  et  $v_c$ , les courants qui les parcourent  $i_a$ ,  $i_b$  et  $i_c$  et les flux totaux à travers ces bobines  $\psi_a$ ,  $\psi_b$  et  $\psi_c$ . Les lois des mailles s'écrivent ainsi :

$$v_a = R_s i_a + \frac{d\psi_a}{dt}$$

$$v_b = R_s i_b + \frac{d\psi_b}{dt}$$

$$v_c = R_s i_c + \frac{d\psi_c}{dt}$$

Ces relations peuvent s'écrire sous forme matricielle :

$$\mathbf{V}_s = R_s \mathbf{I}_s + \frac{d}{dt} \boldsymbol{\Psi}_s$$

en posant :

$$\mathbf{V}_s = \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I}_s = \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Psi}_s = \begin{bmatrix} \Psi_a \\ \Psi_b \\ \Psi_c \end{bmatrix}$$

$\mathbf{V}_s$  est la matrice colonne des tensions,  $\mathbf{I}_s$  la matrice colonne des courants et  $\boldsymbol{\Psi}_s$  la matrice colonne des flux totaux pour le stator.

Chaque phase rotorique présente une résistance  $R_r$ . Les tensions aux bornes des phases A, B et C sont respectivement appelées  $v_A$ ,  $v_B$  et  $v_C$  les courants qui les parcourent  $i_A$ ,  $i_B$  et  $i_C$  et les flux totaux à travers ces bobines  $\Psi_A$ ,  $\Psi_B$  et  $\Psi_C$ . Les lois des mailles s'écrivent ainsi :

$$v_A = R_r i_A + \frac{d\Psi_A}{dt}$$

$$v_B = R_r i_B + \frac{d\Psi_B}{dt}$$

$$v_C = R_r i_C + \frac{d\Psi_C}{dt}$$

Ces relations peuvent s'écrire sous forme matricielle :

$$\mathbf{V}_r = R_r \mathbf{I}_r + \frac{d}{dt} \boldsymbol{\Psi}_r$$

en posant :

$$\mathbf{V}_r = \begin{bmatrix} v_A \\ v_B \\ v_C \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I}_r = \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Psi}_r = \begin{bmatrix} \Psi_A \\ \Psi_B \\ \Psi_C \end{bmatrix}$$

$\mathbf{V}_r$  est la matrice colonne des tensions,  $\mathbf{I}_r$  la matrice colonne des courants,  $\boldsymbol{\Psi}_r$  la matrice colonne des flux totaux.

Dans le fonctionnement normal du moteur, l'enroulement du rotor est court-circuité (c'est le seul cas possible pour un moteur à cage) et l'équation électrique du rotor devient :

$$\mathbf{0} = R_r \mathbf{I}_r + \frac{d}{dt} \boldsymbol{\Psi}_r$$

où  $\mathbf{0}$  est la matrice colonne nulle d'ordre 3.

### 7.3.3 Relations entre flux et courants

Les relations entre flux totaux et les courants peuvent s'écrire sous forme matricielle :

$$\boldsymbol{\Psi}_s = L_s \mathbf{I}_s + M_{sr} \mathbf{I}_r \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\Psi}_r = {}^t M_{sr} \mathbf{I}_s + L_r \mathbf{I}_r$$

en posant :

$$L_s = \begin{bmatrix} L_a & M_{ab} & M_{ab} \\ M_{ab} & L_a & M_{ab} \\ M_{ab} & M_{ab} & L_a \end{bmatrix}$$

$$L_r = \begin{bmatrix} L_A & M_{AB} & M_{AB} \\ M_{AB} & L_A & M_{AB} \\ M_{AB} & M_{AB} & L_A \end{bmatrix}$$

$$M_{sr} = M_{sr} \begin{bmatrix} \cos \theta_e & \cos \left( \theta_e + \frac{2\pi}{3} \right) & \cos \left( \theta_e - \frac{2\pi}{3} \right) \\ \cos \left( \theta_e - \frac{2\pi}{3} \right) & \cos \theta_e & \cos \left( \theta_e + \frac{2\pi}{3} \right) \\ \cos \left( \theta_e + \frac{2\pi}{3} \right) & \cos \left( \theta_e - \frac{2\pi}{3} \right) & \cos \theta_e \end{bmatrix}$$

$L_s$  et  $L_r$  sont respectivement les matrices des inductances statoriques et rotoriques tandis que  $M_{sr}$  est la matrice des inductances mutuelles entre stator et rotor.  $\theta_e$  est l'angle électrique entre la phase A du rotor et la phase a du stator. En remplaçant les expressions des flux dans les formules des tensions, nous obtenons :

$$V_s = R_s I_s + L_s \frac{dI_s}{dt} + \frac{d}{dt} (M_{sr} I_r)$$

$$V_r = R_r I_r + L_r \frac{dI_r}{dt} + \frac{d}{dt} ({}^t M_{sr} I_s)$$

### 7.3.4 Moment du couple

Le moment du couple peut être calculé par la formule générale :

$$\gamma = \frac{1}{2} {}^t I \frac{dL}{d\theta} I$$

En séparant les sous-matrices relatives au stator et au rotor, nous pouvons écrire :

$$\gamma = \frac{1}{2} [{}^t I_s \quad {}^t I_r] \frac{d}{d\theta} \begin{bmatrix} L_s & M_{sr} \\ {}^t M_{sr} & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_s \\ I_r \end{bmatrix}$$

Cette formule se simplifie car les coefficients des matrices  $L_s$  et  $L_r$  sont indépendants de la position, ce qui implique :

$$\frac{dL_s}{d\theta} = \frac{dL_r}{d\theta} = 0$$

De plus, nous tenons compte de l'égalité :

$${}^t I_s \frac{dM_{sr}}{d\theta} I_r = {}^t I_r \frac{d{}^t M_{sr}}{d\theta} I_s$$

Cela donne :

$$\gamma = {}^t I_s \frac{dM_{sr}}{d\theta} I_r$$

## 7.4 Application de la transformation de Park

La transformation de Park permet de transformer les enroulements triphasés statorique et rotorique par des enroulements diphasés tournants solidaires d'un même repère dq. Les angles de rotation utilisés dans la transformation de Park sont  $\xi_s$  pour le stator et  $\xi_r$  pour le rotor (*figure 7.9*).

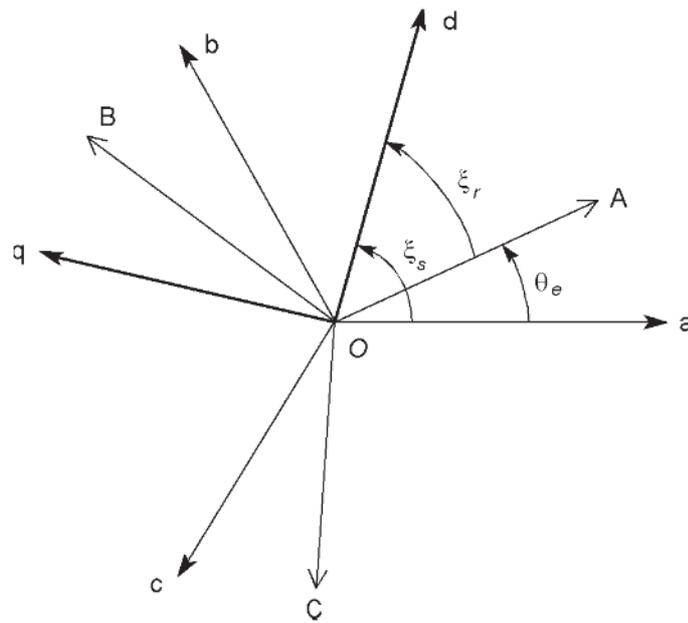


Figure 7.9 – Définition des angles dans le plan électrique.

Ces deux angles sont liés à l'angle électrique définissant la position du rotor par :

$$\xi_s - \xi_r = \theta_e$$

### 7.4.1 Équations électriques

Exprimons les matrices colonnes des grandeurs triphasées ( $V_s$  pour les tensions,  $I_s$  pour les courants et  $\Psi_s$  pour les flux totaux) en fonction des matrices colonnes des composantes de Park ( $V_{sP}$  pour les tensions,  $I_{sP}$  pour les courants et  $\Psi_{sP}$  pour les flux totaux) :

$$V_s = P_s^{-1} V_{sP}$$

$$I_s = P_s^{-1} I_{sP}$$

$$\Psi_s = P_s^{-1} \Psi_{sP}$$

Remplaçons ces grandeurs dans l'équation des tensions :

$$P_s^{-1} V_{sP} = R_s P_s^{-1} I_{sP} + \frac{d(P_s^{-1} \Psi_{sP})}{dt}$$

Utilisons la formule de la dérivée d'un produit :

$$P_s^{-1} V_{sP} = R_s P_s^{-1} I_{sP} + P_s^{-1} \frac{d\Psi_{sP}}{dt} + \frac{dP_s^{-1}}{dt} \Psi_{sP}$$

Multiplions à gauche par la matrice de Park :

$$\mathbf{V}_{sP} = R_s \mathbf{I}_{sP} + \frac{d\boldsymbol{\Psi}_{sP}}{dt} + \mathbf{P}_s \frac{d\mathbf{P}_s^{-1}}{dt} \boldsymbol{\Psi}_{sP}$$

Pour simplifier le dernier terme, écrivons la matrice de la transformation inverse de Park :

$$\mathbf{P}_s^{-1} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \xi_s & -\sin \xi_s & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos\left(\xi_s - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\xi_s - \frac{2\pi}{3}\right) & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos\left(\xi_s + \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\xi_s + \frac{2\pi}{3}\right) & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Dérivons-la par rapport au temps :

$$\frac{d\mathbf{P}_s^{-1}}{dt} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} -\sin \xi_s & -\cos \xi_s & 0 \\ -\sin\left(\xi_s - \frac{2\pi}{3}\right) & -\cos\left(\xi_s - \frac{2\pi}{3}\right) & 0 \\ -\sin\left(\xi_s + \frac{2\pi}{3}\right) & -\cos\left(\xi_s + \frac{2\pi}{3}\right) & 0 \end{bmatrix} \frac{d\xi_s}{dt}$$

Effectuons le produit matriciel :

$$\mathbf{P}_s \frac{d\mathbf{P}_s^{-1}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{d\xi_s}{dt}$$

Nous pouvons en déduire les relations entre les composantes de Park :

$$v_{sd} = R_s i_{sd} + \frac{d\boldsymbol{\Psi}_{sd}}{dt} - \boldsymbol{\Psi}_{sq} \frac{d\xi_s}{dt}$$

$$v_{sq} = R_s i_{sq} + \frac{d\boldsymbol{\Psi}_{sq}}{dt} + \boldsymbol{\Psi}_{sd} \frac{d\xi_s}{dt}$$

$$v_{sh} = R_s i_{sh} + \frac{d\boldsymbol{\Psi}_{sh}}{dt}$$

Introduisons la vitesse angulaire électrique du repère dq, définie par :

$$\omega_a = \frac{d\xi_s}{dt}$$

Les expressions des tensions deviennent ainsi :

$$v_{sd} = R_s i_{sd} + \frac{d\psi_{sd}}{dt} - \psi_{sq} \omega_a$$

$$v_{sq} = R_s i_{sq} + \frac{d\psi_{sq}}{dt} + \psi_{sd} \omega_a$$

La même démarche appliquée au rotor conduit à :

$$0 = R_r i_{rd} + \frac{d\psi_{rd}}{dt} - \psi_{rq} \frac{d\xi_r}{dt}$$

$$0 = R_r i_{rq} + \frac{d\psi_{rq}}{dt} + \psi_{rd} \frac{d\xi_r}{dt}$$

$$0 = R_r i_{rh} + \frac{d\psi_{rh}}{dt}$$

Tenons compte de la relation entre les angles :

$$\xi_s - \xi_r = \theta_e$$

En la dérivant, nous obtenons :

$$\frac{d\xi_s}{dt} - \frac{d\xi_r}{dt} = \frac{d\theta_e}{dt}$$

Introduisons alors la vitesse angulaire électrique  $\omega_a$  du repère dq et la vitesse angulaire électrique  $\omega_e$  du rotor :

$$\frac{d\xi_r}{dt} = \omega_a - \omega_e$$

Les expressions des tensions deviennent ainsi :

$$0 = R_r i_{rd} + \frac{d\psi_{rd}}{dt} - \psi_{rq} (\omega_a - \omega_e)$$

$$0 = R_r i_{rq} + \frac{d\psi_{rq}}{dt} + \psi_{rd} (\omega_a - \omega_e)$$

### 7.4.2 Relations entre flux et courants

Partons de la relation :

$$\Psi_s = L_s I_s + M_{sr} I_r$$

Multiplions à gauche par la matrice de Park relative au stator pour obtenir la matrice colonne des composantes de Park des flux totaux :

$$\Psi_{sP} = P_s \Psi_s = P_s L_s I_s + P_s M_{sr} I_r$$

Pour calculer le premier terme de la somme du second membre, décomposons la matrice des inductances statoriques de la façon suivante :

$$L_s = \begin{bmatrix} L_a - M_{ab} & 0 & 0 \\ 0 & L_a - M_{ab} & 0 \\ 0 & 0 & L_a - M_{ab} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{ab} & M_{ab} & M_{ab} \\ M_{ab} & M_{ab} & M_{ab} \\ M_{ab} & M_{ab} & M_{ab} \end{bmatrix}$$

soit :

$$L_s = (L_a - M_{ab}) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + M_{ab} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Effectuons d'abord le produit à droite par la matrice colonne des courants :

$$L_s I_s = (L_a - M_{ab}) \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + M_{ab} \begin{bmatrix} i_a + i_b + i_c \\ i_a + i_b + i_c \\ i_a + i_b + i_c \end{bmatrix}$$

Effectuons ensuite le produit à gauche par la matrice de Park, en introduisant la composante homopolaire  $i_{sh} = \frac{1}{\sqrt{3}} (i_a + i_b + i_c)$  du courant statorique :

$$P_s L_s I_s = (L_a - M_{ab}) P_s I_s + \sqrt{3} M_{ab} i_{sh} P_s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nous voyons apparaître la matrice colonne des composantes de Park des courants statoriques :

$$P_s I_s = I_{sP}$$

Par ailleurs, effectuons le produit matriciel :

$$P_s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \xi_s & \cos \left( \xi_s - \frac{2\pi}{3} \right) & \cos \left( \xi_s + \frac{2\pi}{3} \right) \\ -\sin \xi_s & -\sin \left( \xi_s - \frac{2\pi}{3} \right) & -\sin \left( \xi_s + \frac{2\pi}{3} \right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Nous arrivons à :

$$\mathbf{P}_s \mathbf{L}_s \mathbf{I}_s = \begin{bmatrix} (L_a - M_{ab}) i_{sd} \\ (L_a - M_{ab}) i_{sq} \\ (L_a + 2M_{ab}) i_{sh} \end{bmatrix}$$

Considérons maintenant le second terme de la somme. La matrice des inductances mutuelles entre stator et rotor est :

$$\mathbf{M}_{sr} = M_{sr} \begin{bmatrix} \cos \theta_e & \cos\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos \theta_e & \cos\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos \theta_e \end{bmatrix}$$

Effectuons pour commencer le produit de la matrice de Park par la matrice des inductances mutuelles entre stator et rotor :

$$\mathbf{P}_s \mathbf{M}_{sr} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \xi_s & \cos\left(\xi_s - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\xi_s + \frac{2\pi}{3}\right) \\ -\sin \xi_s & -\sin\left(\xi_s - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\xi_s + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} M_{sr} \begin{bmatrix} \cos \theta_e & \cos\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos \theta_e & \cos\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos \theta_e \end{bmatrix}$$

Pour le calcul des coefficients de cette matrice, transformons les produits de fonctions trigonométriques en sommes par les formules :

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) + \sin(a - b)]$$

Tenons compte du fait que la somme de trois fonctions sinusoïdales régulièrement déphasées de  $\frac{2\pi}{3}$  est nulle :

$$\cos x + \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = 0$$

Enfin, simplifions le résultat en utilisant la relation entre les angles :

$$\theta_e = \xi_s - \xi_r$$

Nous obtenons ainsi :

$$P_s M_{sr} = M_{sr} \begin{bmatrix} \cos \xi_r & \cos\left(\xi_r - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\xi_r + \frac{2\pi}{3}\right) \\ -\sin \xi_r & -\sin\left(\xi_r - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\xi_r + \frac{2\pi}{3}\right) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il reste à effectuer le produit à droite avec la matrice colonne des courants du rotor. Cela fait apparaître les composantes directe et en quadrature de ces courants :

$$P_s M_{sr} I_r = \frac{3}{2} M_{sr} \begin{bmatrix} i_{rd} \\ i_{rq} \\ 0 \end{bmatrix}$$

En définitive, la relation entre les composantes de Park des flux et des courants s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \Psi_{sd} \\ \Psi_{sq} \\ \Psi_{sh} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (L_a - M_{ab}) i_{sd} \\ (L_a - M_{ab}) i_{sq} \\ (L_a + 2M_{ab}) i_{sh} \end{bmatrix} + \frac{3}{2} M_{sr} \begin{bmatrix} i_{rd} \\ i_{rq} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Posons :

$$L_s = L_a - M_{ab}$$

$$L_{sh} = L_a + 2M_{ab}$$

$$M = \frac{3}{2} M_{sr}$$

$L_s$  est l'inductance cyclique du stator,  $L_{sh}$  son inductance homopolaire et  $M$  est l'inductance mutuelle cyclique entre stator et rotor.

Les expressions des composantes de Park des flux totaux du stator sont :

$$\Psi_{sd} = L_s i_{sd} + M i_{rd}$$

$$\Psi_{sq} = L_s i_{sq} + M i_{rq}$$

$$\Psi_{sh} = L_{sh} i_{sh}$$

Nous obtenons de la même façon des relations analogues pour les composantes de Park des flux totaux du rotor :

$$\Psi_{rd} = L_r i_{rd} + M i_{sd}$$

$$\Psi_{rq} = L_r i_{rq} + M i_{sq}$$

$$\Psi_{rh} = L_{rh} i_{rh}$$

en posant :

$$L_r = L_A - M_{AB}$$

$$L_{rh} = L_A + 2M_{AB}$$

$L_r$  est l'inductance cyclique du rotor et  $L_{rh}$  son inductance homopolaire.

### 7.4.3 Équations dans différents référentiels

#### ■ Référentiel lié au stator

Dans un référentiel lié au stator, la vitesse  $\omega_a$  est nulle, ce qui conduit à :

$$v_{sd} = R_s i_{sd} + \frac{d\Psi_{sd}}{dt}$$

$$v_{sq} = R_s i_{sq} + \frac{d\Psi_{sq}}{dt}$$

$$0 = R_r i_{rd} + \frac{d\Psi_{rd}}{dt} + \Psi_{rq} \omega_e$$

$$0 = R_r i_{rq} + \frac{d\Psi_{rq}}{dt} - \Psi_{rd} \omega_e$$

### ■ Référentiel lié au rotor

Dans un référentiel lié au rotor, la vitesse  $\omega_a$  est égale à la vitesse électrique  $\omega_e$  du rotor, ce qui donne :

$$v_{sd} = R_s i_{sd} + \frac{d\psi_{sd}}{dt} - \psi_{sq} \omega_e$$

$$v_{sq} = R_s i_{sq} + \frac{d\psi_{sq}}{dt} + \psi_{sd} \omega_e$$

$$0 = R_r i_{rd} + \frac{d\psi_{rd}}{dt}$$

$$0 = R_r i_{rq} + \frac{d\psi_{rq}}{dt}$$

### ■ Référentiel lié au champ tournant

Dans un référentiel lié au champ tournant, la vitesse  $\omega_a$  est égale à la pulsation statorique  $\omega_s$  et la différence  $\omega_a - \omega_e$  est égale à  $g\omega_s$ , ce qui conduit à :

$$v_{sd} = R_s i_{sd} + \frac{d\psi_{sd}}{dt} - \psi_{sq} \omega_s$$

$$v_{sq} = R_s i_{sq} + \frac{d\psi_{sq}}{dt} + \psi_{sd} \omega_s$$

$$0 = R_r i_{rd} + \frac{d\psi_{rd}}{dt} - \psi_{rq} g \omega_s$$

$$0 = R_r i_{rq} + \frac{d\psi_{rq}}{dt} + \psi_{rd} g \omega_s$$

#### 7.4.4 Moment du couple

Le moment du couple électromagnétique peut être calculé par :

$$\gamma = {}^t I_s \frac{dM_{sr}}{d\theta} I_r$$

Introduisons les matrices colonnes des composantes de Park des courants :

$$I_{sP} = P_s I_s$$

$$I_{rP} = P_r I_r$$

Cela donne :

$$\gamma = {}^t I_s P_s \frac{dM_{sr}}{d\theta} P_r I_{rP}$$

La dérivée de la matrice des inductances mutuelles entre le stator et le rotor s'écrit :

$$\frac{dM_{sr}}{d\theta} = -p M_{sr} \begin{bmatrix} \sin\theta_e & \sin\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \sin\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\theta_e & \sin\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \sin\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\theta_e \end{bmatrix}$$

La matrice de Park relative au stator est :

$$P_s = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos\xi_s & \cos\left(\xi_s - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\xi_s + \frac{2\pi}{3}\right) \\ -\sin\xi_s & -\sin\left(\xi_s - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\xi_s + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

La transposée de la matrice de Park relative au rotor est :

$${}^t P_r = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos\xi_r & -\sin\xi_s & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos\left(\xi_r - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\xi_s - \frac{2\pi}{3}\right) & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos\left(\xi_r + \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\xi_s + \frac{2\pi}{3}\right) & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Le produit de ces trois matrices donne :

$$P_s \frac{dM_{sr}}{d\theta} {}^t P_r = -p M \begin{bmatrix} \sin(\theta_e + \xi_r - \xi_s) & \cos(\theta_e + \xi_r - \xi_s) & 0 \\ -\cos(\theta_e + \xi_r - \xi_s) & \sin(\theta_e + \xi_r - \xi_s) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cette matrice se simplifie compte tenu de la relation entre les angles :

$$\theta_e = \xi_s - \xi_r$$

Cela donne pour le couple :

$$\gamma = -p M \begin{bmatrix} i_{sd} & i_{sq} & i_{sb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{rd} \\ i_{rq} \\ i_{rb} \end{bmatrix}$$

$$\gamma = p M (i_{sq} i_{rd} - i_{sd} i_{rq})$$

D'autres formulations peuvent être obtenues en réutilisant les diverses relations établies précédemment :

$$\gamma = p (\Psi_{sd} i_{sq} - \Psi_{sq} i_{sd})$$

$$\gamma = p (\Psi_{rq} i_{rd} - \Psi_{rd} i_{rq})$$

$$\gamma = p \frac{M}{L_s} (\Psi_{sq} i_{rd} - \Psi_{sd} i_{rq})$$

$$\gamma = p \frac{M}{L_r} (\Psi_{rd} i_{sq} - \Psi_{rq} i_{sd})$$

#### 7.4.5 Adaptation des équations pour un moteur à cage

Dans le cas d'un moteur à cage d'écurie, les paramètres du rotor  $R_r$  et  $L_r$  et le paramètre de couplage  $M$  ne sont pas mesurables directement puisqu'aucune connexion n'est possible sur ce rotor. Il est donc intéressant de réécrire les équations en utilisant des grandeurs accessibles par l'expérimentation. On choisit habituellement comme paramètres le coefficient de dispersion de Blondel  $\sigma$  et la constante de temps rotorique  $\tau_r$  :

$$\sigma = 1 - \frac{M^2}{L_s L_r}$$

$$\tau_r = \frac{L_r}{R_r}$$

Il faut effectuer un changement de variables sur les composantes du courant rotorique en posant :

$$i'_{rd} = \frac{L_r}{M} i_{rd}$$

$$i'_{rq} = \frac{L_r}{M} i_{rq}$$

Les équations des tensions deviennent :

$$v_{sd} = R_s i_{sd} + L_s \frac{di_{sd}}{dt} - L_s \omega_s i_{sq} + \frac{M^2}{L_r} \frac{di'_{rd}}{dt} - \frac{M^2}{L_r} \omega_s i'_{rq}$$

$$v_{sq} = L_s \omega_s i_{sd} + R_s i_{sq} + L_s \frac{di_{sq}}{dt} + \frac{M^2}{L_r} \omega_s i'_{rd} + \frac{M^2}{L_r} \frac{di'_{rq}}{dt}$$

$$0 = M \frac{di_{sd}}{dt} - M \omega_r i_{sq} + R_r \frac{M}{L_r} i'_{rd} + M \frac{di'_{rd}}{dt} - M \omega_r i'_{rq}$$

$$0 = M \omega_r i_{sd} + M \frac{di_{sq}}{dt} + M \omega_r i'_{rd} + R_r \frac{M}{L_r} i'_{rq} + M \frac{di'_{rq}}{dt}$$

Dans les deux premières équations, il faut tenir compte du fait que :

$$\frac{M^2}{L_r} = (1 - \sigma) L_s$$

Les troisième et quatrième équations peuvent être simplifiées par  $M$ , puis nous écrivons que :

$$\frac{R_r}{L_r} = \frac{1}{\tau_r}$$

Le système d'équations devient :

$$v_{sd} = R_s i_{sd} + L_s \frac{di_{sd}}{dt} - L_s \omega_s i_{sq} + (1 - \sigma) L_s \frac{di'_{rd}}{dt} - (1 - \sigma) L_s \omega_s i'_{rq}$$

$$v_{sq} = L_s \omega_s i_{sd} + R_s i_{sq} + L_s \frac{di_{sq}}{dt} + (1 - \sigma) L_s \omega_s i'_{rd} + (1 - \sigma) L_s \frac{di'_{rq}}{dt}$$

$$0 = \frac{di_{sd}}{dt} - \omega_r i_{sq} + \frac{1}{\tau_r} i'_{rd} + \frac{di'_{rd}}{dt} - \omega_r i'_{rq}$$

$$0 = \omega_r i_{sd} + \frac{di_{sq}}{dt} + \omega_r i'_{rd} + \frac{1}{\tau_r} i'_{rq} + \frac{di'_{rq}}{dt}$$

Le moment du couple est donné par la formule :

$$\gamma = p \frac{1 - \sigma}{\sigma M} (\Psi_{rd} \Psi_{sq} - \Psi_{rq} \Psi_{sd})$$

## 7.5 Vecteurs d'espace

### 7.5.1 Expression des grandeurs complexes des flux totaux

#### ■ Grandeurs complexes d'espace pour le stator et le rotor

Pour le stator, considérons un axe réel  $O\alpha$  confondu avec l'axe de la phase a et un axe imaginaire  $O\beta$  en quadrature (*figure 7.10*).

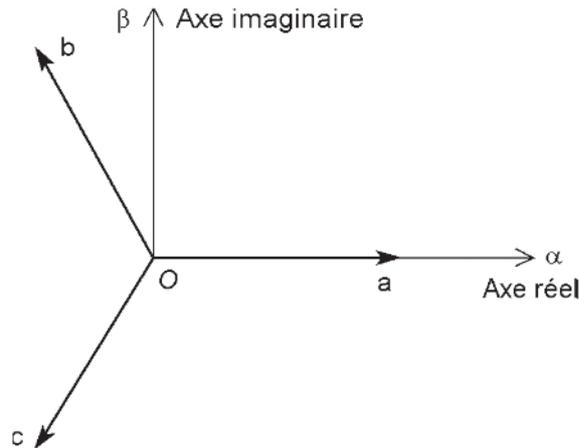


Figure 7.10 – Repère lié au stator.

Comme nous définirons ensuite des grandeurs complexes dans d'autres repères, affectons un indice  $s$  au symbole de la grandeur mise entre parenthèses pour préciser que celle-ci est définie dans ce repère statorique.

La grandeur complexe d'espace du courant statorique est ainsi :

$$(\underline{i}_s)_s = \sqrt{\frac{2}{3}} (i_a + a i_b + a^2 i_c)$$

La grandeur complexe d'espace du flux total statorique est :

$$(\underline{\Psi}_s)_s = \sqrt{\frac{2}{3}} (\Psi_a + a \Psi_b + a^2 \Psi_c)$$

Pour le rotor, choisissons par contre un autre axe réel  $OD$  confondu avec l'axe de la phase A et un axe imaginaire  $OQ$  en quadrature (*figure 7.11*).

Affectons d'un indice  $r$  le symbole de la grandeur mis entre parenthèses pour préciser que celle-ci est définie dans ce repère rotorique.

Les grandeurs d'espace du courant rotorique et du flux total rotorique sont respectivement :

$$(\underline{i}_r)_r = \sqrt{\frac{2}{3}} (i_A + a i_B + a^2 i_C)$$

$$(\underline{\Psi}_r)_r = \sqrt{\frac{2}{3}} (\Psi_A + a\Psi_B + a^2\Psi_C)$$

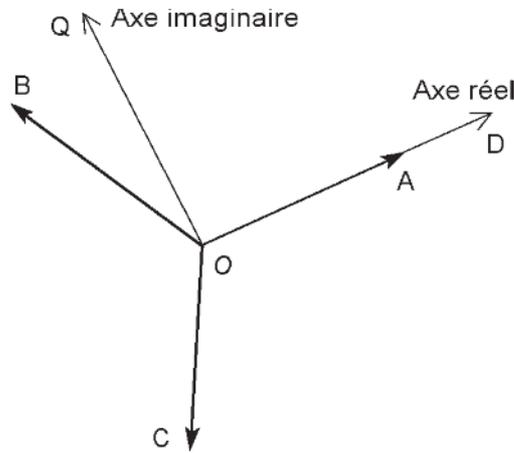


Figure 7.11 – Repère lié au rotor.

#### ■ Grandeur d'espace du flux statorique dans un repère lié au stator

Partons de la formule de définition de la grandeur complexe d'espace du flux statorique :

$$(\underline{\Psi}_s)_s = \sqrt{\frac{2}{3}} (\Psi_a + a\Psi_b + a^2\Psi_c)$$

Remplaçons  $\Psi_a$ ,  $\Psi_b$  et  $\Psi_c$  par leur expressions en fonction des courants :

$$\begin{aligned} \Psi_a = & L_a i_a + M_{ab} i_b + M_{ab} i_c + M_{sr} i_A \cos \theta_e + M_{sr} i_B \cos \left( \theta_e + \frac{2\pi}{3} \right) \\ & + M_{sr} i_C \cos \left( \theta_e - \frac{2\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_b = & M_{ab} i_a + L_a i_b + M_{ab} i_c + M_{sr} i_A \cos \left( \theta_e - \frac{2\pi}{3} \right) + M_{sr} i_B \cos \theta_e \\ & + M_{sr} i_C \cos \left( \theta_e + \frac{2\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_c = & M_{ab} i_a + M_{ab} i_b + L_a i_c + M_{sr} i_A \cos \left( \theta_e + \frac{2\pi}{3} \right) + M_{sr} i_B \cos \left( \theta_e - \frac{2\pi}{3} \right) \\ & + M_{sr} i_C \cos \theta_e \end{aligned}$$

Tenons compte de la propriété des racines cubiques de l'unité :

$$1 + a + a^2 = 0$$

Simplifions l'expression qui apparaît dans les termes d'induction mutuelle entre stator et rotor en utilisant des formules trigonométriques suivantes :

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \cos \theta_e + a \cos \left( \theta_e - \frac{2\pi}{3} \right) + a^2 \cos \left( \theta_e + \frac{2\pi}{3} \right) \\ = \cos \theta_e + a \cos \theta_e \cos \frac{2\pi}{3} + a \sin \theta_e \sin \frac{2\pi}{3} + a^2 \cos \theta_e \cos \frac{2\pi}{3} - a^2 \sin \theta_e \sin \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

Remplaçons les valeurs particulières de sinus et de cosinus :

$$\begin{aligned} \cos \theta_e + a \cos \left( \theta_e - \frac{2\pi}{3} \right) + a^2 \cos \left( \theta_e + \frac{2\pi}{3} \right) \\ = \left( 1 - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a^2 \right) \cos \theta_e + (a - a^2) \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta_e \end{aligned}$$

Tenons compte ensuite que  $1 + a + a^2 = 0$  et que  $a - a^2 = j\sqrt{3}$  :

$$\cos \theta_e + a \cos \left( \theta_e - \frac{2\pi}{3} \right) + a^2 \cos \left( \theta_e + \frac{2\pi}{3} \right) = \frac{3}{2} \cos \theta_e + \frac{3}{2} j \sin \theta_e$$

Nous obtenons enfin :

$$\cos \theta_e + a \cos \left( \theta_e - \frac{2\pi}{3} \right) + a^2 \cos \left( \theta_e + \frac{2\pi}{3} \right) = \frac{3}{2} e^{j\theta_e}$$

La formule de la grandeur d'espace du flux statorique devient ainsi :

$$(\underline{\Psi}_s)_s = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[ (L_a - M_{ab})(i_a + ai_b + a^2i_c) + \frac{3}{2}M_{sr}(i_A + ai_B + a^2i_C) e^{j\theta_e} \right]$$

Nous voyons apparaître les inductances cycliques déjà définies dans la méthode de Park, ainsi que les grandeurs complexes spatiales des courants :

$$(\underline{\Psi}_s)_s = L_s(\underline{i}_s)_s + M(\underline{i}_r)_r e^{j\theta_e}$$

La formule peut s'écrire plus simplement :

$$(\underline{\Psi}_s)_s = L_s(\underline{i}_s)_s + M(\underline{i}_r)_s$$

en introduisant la grandeur complexe spatiale du courant rotorique dans le repère lié au stator :

$$(\underline{i}_r)_s = (\underline{i}_r)_r e^{j\theta_e}$$

### ■ Grandeur d'espace du flux rotorique dans un repère lié au rotor

Partons de la formule de définition de la grandeur d'espace du flux rotorique :

$$(\underline{\Psi}_r)_r = \sqrt{\frac{2}{3}} (\Psi_A + a\Psi_B + a^2\Psi_C)$$

Remplaçons  $\Psi_A$ ,  $\Psi_B$  et  $\Psi_C$  par leur expressions en fonction des courants :

$$\begin{aligned} \Psi_A = L_A i_A + M_{AB} i_B + M_{AB} i_C + M_{sr} i_a \cos \theta_e + M_{sr} i_b \cos \left( \theta_e - \frac{2\pi}{3} \right) \\ + M_{sr} i_c \cos \left( \theta_e + \frac{2\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_B = M_{AB} i_A + L_A i_B + M_{AB} i_C + M_{sr} i_a \cos \left( \theta_e + \frac{2\pi}{3} \right) + M_{sr} i_b \cos \theta_e \\ + M_{sr} i_c \cos \left( \theta_e - \frac{2\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_C = M_{AB} i_A + M_{AB} i_B + L_A i_C + M_{sr} i_a \cos \left( \theta_e - \frac{2\pi}{3} \right) + M_{sr} i_b \cos \left( \theta_e + \frac{2\pi}{3} \right) \\ + M_{sr} i_c \cos \theta_e \end{aligned}$$

L'application des mêmes formules que pour le flux statorique conduit à :

$$(\underline{\Psi}_r)_r = L_r (\underline{i}_r)_r + M (\underline{i}_s)_s e^{-j\theta_e}$$

ou encore :

$$(\underline{\Psi}_r)_r = L_r (\underline{i}_r)_r + M (\underline{i}_s)_r$$

en introduisant la grandeur complexe spatiale du courant statorique dans le repère lié au rotor :

$$(\underline{i}_s)_r = (\underline{i}_s)_s e^{-j\theta_e}$$

### ■ Expressions des grandeurs d'espace des flux dans un repère quelconque

Pour obtenir des expressions des grandeurs d'espace des flux dans un repère quelconque dont l'axe réel fait un angle électrique  $\theta_a$  par rapport à l'axe de la phase a du stator, il suffit d'appliquer les formules de changement de repère et ainsi multiplier les grandeurs exprimées dans un repère lié au stator par  $e^{-j\theta_a}$  et les grandeurs exprimées dans un repère lié au rotor par  $e^{-j(\theta_a - \theta_e)}$ . Notons les grandeurs complexes

spatiales dans un repère quelconque sans ajouter d'indice supplémentaire. Nous avons :

$$\underline{\psi}_s = (\underline{\psi}_s)_s e^{-j\theta_a}$$

$$\underline{\psi}_r = (\underline{\psi}_r)_r e^{-j(\theta_a - \theta_r)}$$

Les expressions des grandeurs complexes spatiales des flux deviennent :

$$\underline{\psi}_s = L_s \underline{i}_s + M \underline{i}_r$$

$$\underline{\psi}_r = L_r \underline{i}_r + M \underline{i}_s$$

### 7.5.2 Équations électriques

#### ■ Équation des grandeurs complexes spatiales des tensions statoriques dans un repère lié au stator

Partons des lois des mailles pour les trois phases du stator :

$$v_a = R_s i_a + \frac{d\psi_a}{dt}$$

$$v_b = R_s i_b + \frac{d\psi_b}{dt}$$

$$v_c = R_s i_c + \frac{d\psi_c}{dt}$$

Multiplions respectivement ces trois relations par les coefficients 1,  $a$  et  $a^2$  et faisons-en la somme pour faire apparaître les grandeurs complexes spatiales dans le repère lié au stator :

$$(\underline{v}_s)_s = R_s (\underline{i}_s)_s + \frac{d(\underline{\psi}_s)_s}{dt}$$

#### ■ Équation des grandeurs complexes spatiales des tensions statoriques dans un repère quelconque

Effectuons le changement de repère pour les différentes grandeurs complexes :

$$\underline{v}_s = (\underline{v}_s)_s e^{-j\theta_a}$$

$$\underline{i}_s = (\underline{i}_s)_s e^{-j\theta_a}$$

$$\underline{\psi}_s = (\underline{\psi}_s)_s e^{-j\theta_a}$$

L'équation électrique devient, en utilisant la formule de la dérivée d'un produit :

$$\underline{v}_s e^{j\theta_a} = R_s \underline{i}_s e^{j\theta_a} + \frac{d\underline{\psi}_s}{dt} e^{j\theta_a} + j \frac{d\theta_a}{dt} \underline{\psi}_s e^{j\theta_a}$$

Faisons apparaître la vitesse électrique de rotation du repère,  $\omega_a = \frac{d\theta_a}{dt}$  et divisons par l'exponentielle :

$$\underline{v}_s = R_s \underline{i}_s + \frac{d\underline{\psi}_s}{dt} + j\omega_a \underline{\psi}_s$$

### ■ Équation des grandeurs complexes spatiales des tensions rotoriques

Partons des lois des mailles pour les trois phases du stator :

$$v_A = R_r i_A + \frac{d\psi_A}{dt}$$

$$v_B = R_r i_B + \frac{d\psi_B}{dt}$$

$$v_C = R_r i_C + \frac{d\psi_C}{dt}$$

Multiplions respectivement ces trois relations par les coefficients 1,  $a$  et  $a^2$  et faisons-en la somme pour faire apparaître les grandeurs complexes spatiales dans le repère lié au rotor :

$$(\underline{v}_r)_r = R_s (\underline{i}_r)_r + \frac{d(\underline{\psi}_r)_r}{dt}$$

### ■ Équation des grandeurs complexes spatiales des tensions rotoriques dans un repère quelconque

Effectuons le changement de repère pour les différentes grandeurs complexes :

$$\underline{v}_r = (\underline{v}_r)_r e^{-j(\theta_a - \theta_e)}$$

$$\underline{i}_r = (\underline{i}_r)_r e^{-j(\theta_a - \theta_e)}$$

$$\underline{\psi}_r = (\underline{\psi}_r)_r e^{-j(\theta_a - \theta_e)}$$

L'équation électrique devient, en utilisant la formule de la dérivée d'un produit :

$$\underline{v}_r e^{j(\theta_a - \theta_e)} = R_r \underline{i}_r e^{j(\theta_a - \theta_e)} + \frac{d\underline{\psi}_r}{dt} e^{j(\theta_a - \theta_e)} + j \frac{d(\theta_a - \theta_e)}{dt} \underline{\psi}_r e^{j(\theta_a - \theta_e)}$$

Faisons apparaître la vitesse électrique de rotation du repère,  $\omega_a = \frac{d\theta_a}{dt}$  et la vitesse électrique de rotation du rotor  $\omega_e = \frac{d\theta_e}{dt}$  puis divisons par l'exponentielle :

$$\underline{v}_r = R_r \underline{i}_r + \frac{d\underline{\psi}_r}{dt} + j(\omega_a - \omega_e) \underline{\psi}_r$$

### 7.5.3 Équations dans différents référentiels

#### ■ Référentiel lié au stator

Dans un référentiel lié au stator, la vitesse  $\omega_a$  est nulle, ce qui conduit à :

$$\underline{v}_s = R_s \underline{i}_s + \frac{d\underline{\psi}_s}{dt}$$

$$\underline{v}_r = R_r \underline{i}_r + \frac{d\underline{\psi}_r}{dt} - j\omega_e \underline{\psi}_r$$

#### ■ Référentiel lié au rotor

Dans un référentiel lié au rotor, la vitesse  $\omega_a$  est égale à la vitesse électrique  $\omega_e$  du rotor, ce qui donne :

$$\underline{v}_s = R_s \underline{i}_s + \frac{d\underline{\psi}_s}{dt} + j\omega_e \underline{\psi}_s$$

$$\underline{v}_r = R_r \underline{i}_r + \frac{d\underline{\psi}_r}{dt}$$

#### ■ Référentiel lié au champ tournant

Dans un référentiel lié au champ tournant, la vitesse  $\omega_a$  est égale à la pulsation statorique  $\omega_s$  et la différence  $\omega_a - \omega_e$  est égale à  $g\omega_s$ , ce qui conduit à :

$$\underline{v}_s = R_s \underline{i}_s + \frac{d\underline{\psi}_s}{dt} + j\omega_s \underline{\psi}_s$$

$$\underline{v}_r = R_r \underline{i}_r + \frac{d\underline{\psi}_r}{dt} + jg\omega_s \underline{\psi}_r$$

### 7.5.4 Relation avec la transformée de Park

Choisissons  $O_d$  comme axe réel et  $O_q$  comme axe imaginaire du plan complexe et définissons les grandeurs complexes d'espace associées aux tensions, courants et flux totaux :

$$\underline{v}_s = v_{sd} + j v_{sq}$$

$$\underline{v}_r = v_{rd} + j v_{rq}$$

$$\underline{i}_s = i_{sd} + j i_{sq}$$

$$\underline{i}_r = i_{rd} + j i_{rq}$$

$$\underline{\psi}_s = \psi_{sd} + j \psi_{sq}$$

$$\underline{\psi}_r = \psi_{rd} + j \psi_{rq}$$

Les équations de Park du moteur deviennent :

$$\underline{v}_s = R_s \underline{i}_s + \frac{d\underline{\psi}_s}{dt} + j \omega_a \underline{\psi}_s$$

$$\underline{v}_r = R_r \underline{i}_r + \frac{d\underline{\psi}_r}{dt} + j(\omega_a - \omega_e) \underline{\psi}_r$$

$$\underline{\psi}_s = L_s \underline{i}_s + M \underline{i}_r$$

$$\underline{\psi}_r = L_r \underline{i}_r + M \underline{i}_s$$

Nous retrouvons bien les mêmes formules que par la méthode des grandeurs complexes d'espace.

### 7.5.5 Expressions du couple

#### ■ Expressions du couple à partir des grandeurs complexes d'espace

Pour exprimer le couple, effectuons le produit du conjugué de la grandeur complexe d'espace du flux total statorique par la grandeur complexe d'espace du courant statorique :

$$\underline{\psi}_s^* \underline{i}_s = (\psi_{sd} - j \psi_{sq})(i_{sd} + j i_{sq})$$

$$\underline{\psi}_s^* \underline{i}_s = \psi_{sd} i_{sd} + \psi_{sq} i_{sq} + j(\psi_{sd} i_{sq} - \psi_{sq} i_{sd})$$

Nous en déduisons une expression du moment du couple :

$$\gamma = p \operatorname{Im}(\underline{\psi}_s^* \underline{i}_s)$$

De la même façon, les autres expressions du couple sont :

$$\gamma = p \operatorname{Im}(\underline{\psi}_r \underline{i}_r^*)$$

$$\gamma = p M \operatorname{Im}(\underline{i}_s \underline{i}_r^*)$$

### ■ Expressions du couple à partir des vecteurs d'espace

Si  $\mathbf{u}_d$  et  $\mathbf{u}_q$  sont des vecteurs unitaires des axes Od et Oq, définissons les vecteurs d'espace associés aux tensions, courants et flux totaux :

$$\mathbf{v}_s = v_{sd} \mathbf{u}_d + v_{sq} \mathbf{u}_q$$

$$\mathbf{v}_r = v_{rd} \mathbf{u}_d + v_{rq} \mathbf{u}_q$$

$$\mathbf{i}_s = i_{sd} \mathbf{u}_d + i_{sq} \mathbf{u}_q$$

$$\mathbf{i}_r = i_{rd} \mathbf{u}_d + i_{rq} \mathbf{u}_q$$

$$\underline{\Psi}_s = \Psi_{sd} \mathbf{u}_d + \Psi_{sq} \mathbf{u}_q$$

$$\underline{\Psi}_r = \Psi_{rd} \mathbf{u}_d + \Psi_{rq} \mathbf{u}_q$$

Pour déterminer l'expression du couple, écrivons le produit vectoriel du vecteur d'espace du flux total statorique par le vecteur d'espace du courant statorique :

$$\underline{\Psi}_s \wedge \mathbf{i}_s = (\Psi_{sd} \mathbf{u}_d + \Psi_{sq} \mathbf{u}_q) \wedge (i_{sd} \mathbf{u}_d + i_{sq} \mathbf{u}_q)$$

Nous obtenons un vecteur orthogonal au plan Odq. Si  $\mathbf{u}_o$  est un vecteur tel que  $(\mathbf{u}_d, \mathbf{u}_q, \mathbf{u}_o)$  forme une base orthonormée directe de l'espace, nous avons (figure 7.12) :

$$\underline{\Psi}_s \wedge \mathbf{i}_s = (\Psi_{sd} i_{sq} - \Psi_{sq} i_{sd}) \mathbf{u}_o$$

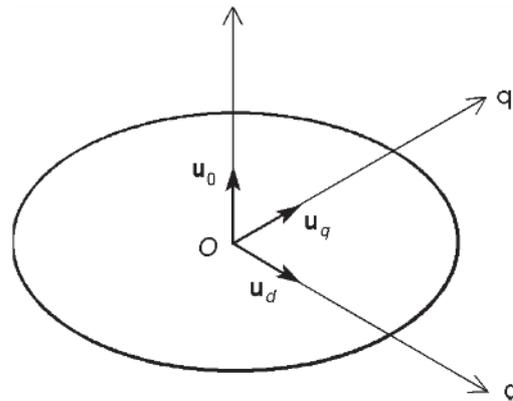


Figure 7.12 – Base orthonormée directe de l'espace.

Nous pouvons alors définir un vecteur couple  $\boldsymbol{\gamma}$  dont la direction est orthogonale au plan  $Odq$  et dont la mesure algébrique est le moment du couple. Celui-ci s'exprime par :

$$\boldsymbol{\gamma} = p \boldsymbol{\Psi}_s \wedge \mathbf{i}_s$$

Les autres expressions du moment du couple peuvent donner des formulations différentes pour le vecteur couple :

$$\boldsymbol{\gamma} = p M \mathbf{i}_r \wedge \mathbf{i}_s$$

$$\boldsymbol{\gamma} = p \frac{M}{L_s} \mathbf{i}_r \wedge \boldsymbol{\Psi}_s$$

$$\boldsymbol{\gamma} = p \frac{M}{L_r} \boldsymbol{\Psi}_r \wedge \mathbf{i}_s$$

$$\boldsymbol{\gamma} = p \frac{1 - \sigma}{\sigma M} \boldsymbol{\Psi}_r \wedge \boldsymbol{\Psi}_s$$

## 8 • MOTEUR ASYNCHRONE EN RÉGIME PERMANENT

---

Dans beaucoup d'applications, le moteur asynchrone est branché directement sur le réseau triphasé. Le stator est alors alimenté par un système triphasé équilibré de tensions. Quand la vitesse devient constante, le régime permanent est atteint et les grandeurs électriques et magnétiques sont toutes des fonctions sinusoïdales du temps. Les équations de la machine se simplifient et on utilise la méthode classique des grandeurs complexes. Les divers schémas équivalents qui peuvent être associés à ces équations facilitent l'étude des fonctionnements en régime permanent. Un artifice est cependant nécessaire pour ne considérer que des grandeurs de même fréquence. Si le moteur est alimenté par un onduleur de tension, le fonctionnement est similaire pour un réglage fixé. Toutefois, les diverses grandeurs n'étant pas parfaitement sinusoïdales, il faut considérer leur fondamental puis leurs harmoniques. Si le moteur est alimenté par un onduleur de courant, le principe est le même, mais l'étude diffère puisque ce sont les courants qui sont imposés et non les tensions.

### 8.1 Simplification des équations

#### 8.1.1 Équations des grandeurs complexes spatiales dans un référentiel lié au champ tournant

Dans un référentiel lié au champ tournant, les grandeurs d'espace des flux sont indépendantes du temps en régime sinusoïdal permanent et leurs dérivées sont donc nulles. Les équations des grandeurs complexes spatiales se simplifient :

$$\underline{v}_s = R_s \underline{i}_s + j\omega_s \underline{\psi}_s$$

$$\underline{v}_r = R_r \underline{i}_r + jg\omega_s \underline{\psi}_r$$

$$\underline{\psi}_s = L_s \underline{i}_s + M \underline{i}_r$$

$$\underline{\psi}_r = L_r \underline{i}_r + M \underline{i}_s$$

Dans les formules des tensions, remplaçons les flux par leurs expressions en fonction des courants :

$$\underline{v}_s = R_s \underline{i}_s + jL_s \omega_s \underline{i}_s + jM \omega_s \underline{i}_r$$

$$\underline{v}_r = R_r \underline{i}_r + jL_r g \omega_s \underline{i}_r + jM g \omega_s \underline{i}_s$$

En fonctionnement normal, le rotor est en court-circuit et la seconde relation devient, après division par le glissement :

$$0 = \frac{R_r}{g} \underline{i}_r + jL_r \omega_s \underline{i}_r + jM \omega_s \underline{i}_s$$

### 8.1.2 Passage aux équations des grandeurs complexes temporelles

Nous pouvons ensuite passer des grandeurs complexes spatiales aux grandeurs complexes temporelles. Il se pose néanmoins un problème : les grandeurs rotoriques n'ont pas la même pulsation que les grandeurs statoriques. Il n'est donc pas possible d'utiliser la méthode des grandeurs complexes ou celle de Fresnel pour décrire le fonctionnement du moteur asynchrone, celles-ci ne s'appliquant que pour des systèmes où toutes les grandeurs sinusoïdales sont de même fréquence. Un diagramme de Fresnel tracé pour le stator et un autre pour le rotor ne tournant pas à la même vitesse, ils ne peuvent être associés. Néanmoins, la commodité de ces outils va nous amener à contourner la difficulté en imaginant un dispositif fictif identique au moteur asynchrone étudié, mais dans lequel le rotor est immobile. Le champ tournant créé par ce rotor fictif est identique à celui créé par le rotor réel en mouvement si l'enroulement qu'il porte est parcouru par des courants triphasés équilibrés de même valeur efficace mais de pulsation  $\omega_s$ . Dans ce cas, les deux dispositifs sont équivalents, vus du stator, ce qui nous permet de tracer un schéma équivalent ramené au stator qui représente rigoureusement le comportement des grandeurs correspondantes. Il faut cependant bien noter que le rotor réel n'est pas présent dans ce schéma. Avec cet artifice, toutes les fonctions du temps sont maintenant sinusoïdales, de pulsation  $\omega_s$ . Nous pouvons donc utiliser la méthode des grandeurs complexes ou tracer un diagramme de Fresnel. Comme nous savons que, dans le cas du régime sinusoïdal permanent, les grandeurs complexes temporelles (représentées par des majuscules soulignées) sont proportionnelles aux grandeurs complexes spatiales (représentées par des minuscules soulignées), les équations du moteur (ou plutôt du dispositif fictif dont nous venons de parler) ont même forme :

$$\underline{V}_s = R_s \underline{I}_s + jL_s \omega_s \underline{I}_s + jM \omega_s \underline{I}_r$$

$$0 = \frac{R_r}{g} \underline{I}_r + jL_r \omega_s \underline{I}_r + jM \omega_s \underline{I}_s$$

Ces relations sont à l'origine des différents modèles utilisés pour décrire le moteur asynchrone en régime sinusoïdal permanent.

## 8.2 Modèles équivalents

### 8.2.1 Modèle avec circuits couplés

Les équations précédentes correspondent à celles d'un schéma monophasé comportant deux bobines d'inductances propres  $L_s$  et  $L_r$  couplées par une inductance mutuelle  $M$  (figure 8.1).

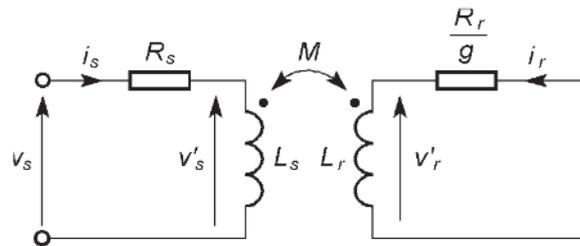


Figure 8.1 – Modèle aux circuits couplés.

La résistance  $\frac{R_r}{g}$  peut être scindée en deux parties :

$$\frac{R_r}{g} = R_r + \frac{1-g}{g} R_r$$

Le modèle alors obtenu (figure 8.2) est identique au schéma monophasé équivalent d'un transformateur triphasé fictif dont le primaire a une résistance  $R_s$  et le secondaire une résistance  $R_r$  et qui est chargé par une résistance  $\frac{1-g}{g} R_r$ .

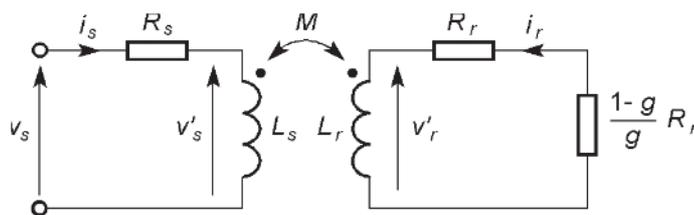


Figure 8.2 – Schéma monophasé équivalent d'un transformateur fictif représentant le fonctionnement du moteur asynchrone.

Comme pour les transformateurs, les schémas avec circuits couplés ne sont guère utilisés pour décrire les moteurs asynchrones : on préfère des modèles où apparaissent les inductances de fuites.

### 8.2.2 Modèle avec inductances de fuites partielles

Une première modélisation du transformateur, et donc du transformateur fictif associé à un moteur asynchrone, consiste à définir des inductances de fuites séparément pour le primaire et le secondaire.

On introduit le rapport de transformation du transformateur idéal :

$$m = \frac{k_r N_r}{k_s N_s}$$

On peut alors définir l'inductance cyclique de fuites du stator :

$$l_s = L_s - \frac{M}{m}$$

et l'inductance cyclique de fuites du rotor :

$$l_r = L_r - mM$$

En remplaçant dans les équations des circuits couplés, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \underline{V}_s &= R_s \underline{I}_s + j l_s \omega_s \underline{I}_s + j \frac{M}{m} \omega_s \underline{I}_s + j M \omega_s \underline{I}_r \\ 0 &= \frac{R_r}{g} \underline{I}_r + j l_r \omega_s \underline{I}_r + j mM \omega_s \underline{I}_r + j M \omega_s \underline{I}_s \end{aligned}$$

Ramenons ensuite les grandeurs rotoriques au stator en posant :

$$\begin{aligned} \underline{I}'_r &= -m \underline{I}_r \\ R'_r &= \frac{R_r}{m^2} \\ l'_r &= \frac{l_r}{m^2} \end{aligned}$$

$\underline{I}'_r$  est le courant rotorique ramené au stator (noter le signe – dû au choix initial de la convention de signe du courant rotorique pour avoir un signe + devant les termes dus aux inductances mutuelles).  $R'_r$  est la résistance du rotor ramenée au stator et  $l'_r$  est l'inductance cyclique de fuites du rotor ramenée au stator. En introduisant ces paramètres dans les formules précédentes, nous arrivons à :

$$\begin{aligned} \underline{V}_s &= R_s \underline{I}_s + j l_s \omega_s \underline{I}_s + j \frac{M}{m} \omega_s (\underline{I}_s - \underline{I}'_r) \\ 0 &= -\frac{m^2 R'_r}{g} \frac{\underline{I}'_r}{m} - j m^2 l'_r \omega_s \frac{\underline{I}'_r}{m} + j M \omega_s (\underline{I}_s - \underline{I}'_r) \end{aligned}$$

Nous pouvons alors introduire le courant magnétisant :

$$\underline{I}_m = \underline{I}_s - \underline{I}'_r$$

et l'inductance cyclique magnétisante :

$$L_m = \frac{M}{m}$$

Nous arrivons ainsi à :

$$\underline{V}_s = R_s \underline{I}_s + j l_s \omega_s \underline{I}_s + j L_m \omega_s \underline{I}_m$$

$$0 = \frac{R'_r}{g} \underline{I}'_r + j l'_r \omega_s \underline{I}'_r - j L_m \omega_s \underline{I}_m$$

Ces relations permettent de tracer le schéma équivalent ramené au stator avec inductances de fuites partielles (*figure 8.3*).

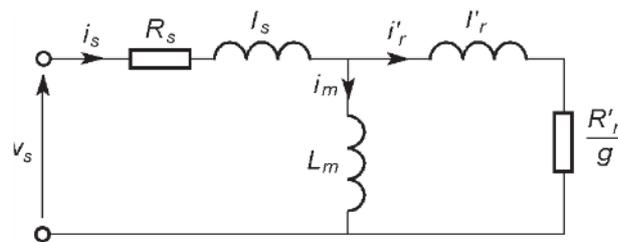


Figure 8.3 – Schéma équivalent ramené au stator avec inductances de fuites partielles.

De façon analogue à ce qui a été fait pour le modèle avec inductances couplées, il est intéressant de scinder la résistance  $\frac{R'_r}{g}$  en deux parties (*figure 8.4*).

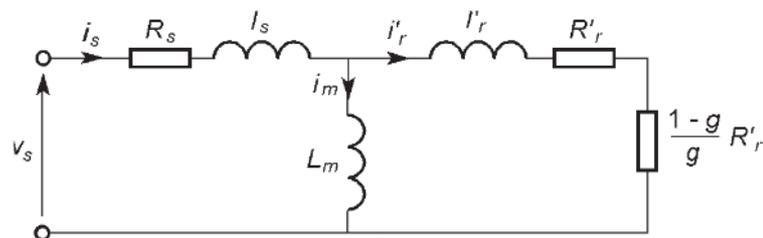


Figure 8.4 – Schéma monophasé équivalent d'un transformateur fictif représentant le fonctionnement du moteur asynchrone.

### 8.2.3 Modèle avec inductances de fuites totalisées au rotor

Une seconde modélisation du transformateur consiste à globaliser l'ensemble des fuites soit au primaire, soit au secondaire en définissant les inductances de fuites totales de Boucherot. Le schéma le plus courant pour le moteur asynchrone rassemble les fuites au rotor (donc au secondaire du transformateur fictif).

À partir des équations du circuit couplé, exprimons les tensions aux bornes des inductances :

$$\underline{V}_s' = jL_s \omega_s \underline{I}_s + jM \omega_s \underline{I}_r$$

$$\underline{V}_r' = jM \omega_s \underline{I}_s + jL_r \omega_s \underline{I}_r$$

Exprimons le courant statorique dans la première relation :

$$\underline{I}_s = \frac{\underline{V}_s'}{jL_s \omega_s} - \frac{M}{L_s} \underline{I}_r$$

et remplaçons dans la seconde :

$$\underline{V}_r' = \frac{M}{L_s} \underline{V}_s' + jL_r \omega_s \left(1 - \frac{M^2}{L_s L_r}\right) \underline{I}_r$$

L'inductance de fuites totalisées au rotor est définie par :

$$L_{Br} = L_r \left(1 - \frac{M^2}{L_s L_r}\right)$$

soit :

$$L_{Br} = \sigma L_r$$

où  $\sigma$  est le coefficient de dispersion de Blondel dont l'expression est :

$$\sigma = 1 - \frac{M^2}{L_s L_r}$$

La relation obtenue plus haut s'écrit alors :

$$\underline{V}_r' = \frac{M}{L_s} \underline{V}_s' + jL_{Br} \omega_s \underline{I}_r$$

Ramenons maintenant les grandeurs rotoriques au stator en posant :

$$\underline{I}_r'' = -\frac{M}{L_s} \underline{I}_r$$

$$R_r'' = \left(\frac{L_s}{M}\right)^2 R_r$$

$$L_{Br}'' = \left(\frac{L_s}{M}\right)^2 L_{Br}$$

$\underline{I_r''}$  est le courant rotorique ramené au stator,  $R_r''$  est la résistance du rotor ramenée au stator et  $L_{Br}''$  est l'inductance de fuites totalisées au rotor et ramenée au stator.

Nous avons ainsi :

$$\frac{L_s}{M} \underline{V_r'} = \underline{V_s} + jL_{Br}'' \omega_s \underline{I_r''}$$

Définissons le courant magnétisant par :

$$\underline{I_{sm}} = \underline{I_s} - \underline{I_r''}$$

Nous avons par ailleurs :

$$\underline{V_s} = R_s \underline{I_s} + \underline{V_s'}$$

et :

$$\underline{V_r'} = -\frac{R_r}{g} \underline{I_r''}$$

Après introduction des grandeurs ramenées au stator, cette dernière formule devient :

$$\frac{L_s}{M} \underline{V_r'} = \frac{R_r''}{g} \underline{I_r''}$$

Ces différentes relations permettent de tracer le schéma équivalent ramené au stator avec inductances de fuites totalisées au rotor et ramenées au stator (figure 8.5).

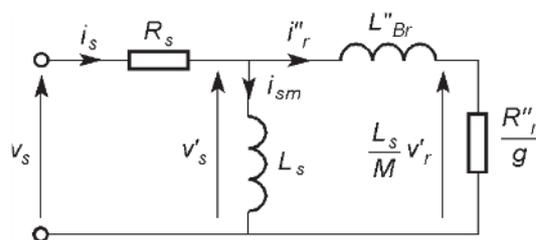


Figure 8.5 – Schéma équivalent ramené au stator avec inductances de fuites totalisées au rotor.

**Remarque**

Les paramètres ramenés  $\underline{I}_r'$ ,  $\underline{I}_m$  et  $\underline{R}_r'$  introduits dans la méthode des fuites partielles diffèrent des paramètres  $\underline{I}_r''$ ,  $\underline{I}_{sm}$  et  $\underline{R}_r''$  utilisés dans la méthode des fuites totales car le rapport de transformation  $m$  du transformateur idéal du premier cas est remplacé par le rapport  $\frac{M}{L_s}$  dans le second cas. Toutefois, les valeurs numériques de ces deux rapports sont très proches.

**8.2.4 Modèle avec inductances de fuites totalisées au stator**

Une autre modélisation, moins classique, consiste à totaliser les inductances de fuites au stator.

À partir des équations du circuit couplé, exprimons, les tensions aux bornes des inductances :

$$\underline{V}_s' = jL_s \omega_s \underline{I}_s + jM \omega_s \underline{I}_r$$

$$\underline{V}_r' = jM \omega_s \underline{I}_s + jL_r \omega_s \underline{I}_r$$

Exprimons le courant rotorique dans la seconde relation :

$$\underline{I}_r = \frac{\underline{V}_r'}{jL_r \omega_s} - \frac{M}{L_r} \underline{I}_s$$

et remplaçons dans la première :

$$\underline{V}_s' = \frac{M}{L_r} \underline{V}_r' + jL_s \omega_s \left(1 - \frac{M^2}{L_s L_r}\right) \underline{I}_s$$

L'inductance de fuites totalisées au stator est définie par :

$$L_{Bs} = L_s \left(1 - \frac{M^2}{L_s L_r}\right)$$

soit :

$$L_{Bs} = \sigma L_s$$

où  $\sigma$  est le coefficient de dispersion de Blondel.

La relation obtenue plus haut s'écrit alors :

$$\underline{V}_s' = \frac{M}{L_r} \underline{V}_r' + jL_{Bs} \omega_s \underline{I}_s$$

Ramenons maintenant le courant rotorique au stator en posant :

$$\underline{I}_q = -\frac{L_r}{M} \underline{I}_r$$

Définissons le courant magnétisant par :

$$\underline{I}_d = \underline{I}_s - \underline{I}_q$$

Mettons la première équation des circuits couplés sous la forme :

$$\underline{V}'_s = j\sigma L_s \omega_s \underline{I}_s + j(1 - \sigma)L_s \omega_s \underline{I}_s + jM\omega_s \underline{I}_r$$

soit :

$$\underline{V}'_s = j\sigma L_s \omega_s \underline{I}_s + j(1 - \sigma)L_s \omega_s \left( \underline{I}_s + \frac{M}{(1 - \sigma)L_s} \underline{I}_r \right)$$

Remplaçons dans la dernière parenthèse le coefficient de dispersion par son expression :

$$\underline{V}'_s = j\sigma L_s \omega_s \underline{I}_s + j(1 - \sigma)L_s \omega_s \left( \underline{I}_s + \frac{L_r}{M} \underline{I}_r \right)$$

Nous voyons ainsi apparaître le courant magnétisant :

$$\underline{V}'_s = j\sigma L_s \omega_s \underline{I}_s + j(1 - \sigma)L_s \omega_s \underline{I}_d$$

Nous avons par ailleurs :

$$\underline{V}_s = R_s \underline{I}_s + \underline{V}'_s$$

et :

$$\underline{V}'_r = -\frac{R_r}{g} \underline{I}_r$$

Après introduction des grandeurs ramenées au stator, cette dernière formule devient :

$$\frac{M}{L_r} \underline{V}'_r = \frac{M^2 R_r}{L_r^2 g} \underline{I}_q$$

Ces différentes relations permettent de tracer le schéma équivalent ramené au stator avec inductances de fuites totalisées au rotor (*figure 8.6*).

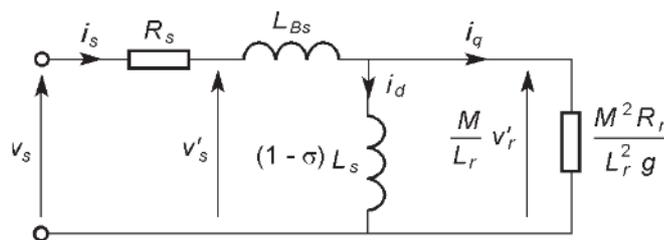


Figure 8.6 – Schéma équivalent ramené au stator avec inductances de fuites totalisées au rotor.

### 8.2.5 Prise en compte des pertes ferromagnétiques

On peut corriger les modèles précédents pour tenir compte des pertes ferromagnétiques en ajoutant une résistance au schéma. La démarche est la même que pour un transformateur. Les pertes ferromagnétiques statoriques  $p_f$  sont proportionnelles au carré de la valeur efficace  $\psi_s$  du flux statorique et donc au carré de la valeur efficace  $V'_s$  de la tension interne au stator.

Dans le modèle avec inductances de fuites totalisées au rotor, il suffit donc de placer une résistance  $R_f$  en parallèle avec l'inductance  $L_s$  (figure 8.7) dont la valeur est telle que :

$$p_f = \frac{3 V_s'^2}{R_f}$$

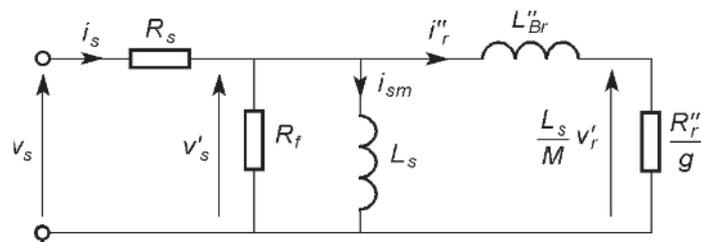


Figure 8.7 – Résistance représentant les pertes ferromagnétiques sur le modèle avec inductances de fuites totalisées au rotor.

Sur le modèle avec inductances de fuites partielles, une résistance  $R'_f$  est placée en parallèle de l'inductance magnétisante (figure 8.8). Sa valeur est un peu différente de celle de  $R_f$  à cause de la chute de tension dans  $L_s$ , mais l'écart est minime.

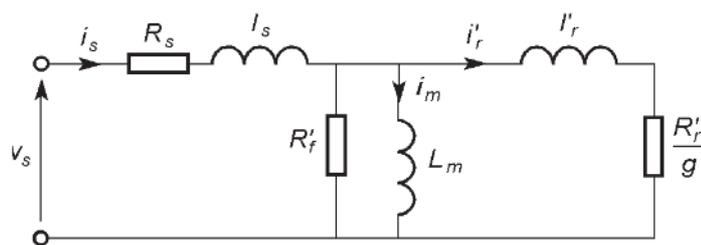


Figure 8.8 – Résistance représentant les pertes ferromagnétiques sur le modèle avec inductances de fuites partielles.

### 8.2.6 Modèles très simplifiés

Les modèles décrits jusqu'à présent permettent de bien prendre en compte tous les paramètres essentiels du fonctionnement en régime permanent d'un moteur asynchrone. Ils sont nécessaires pour effectuer un calcul rigoureux, mais quand on se contente d'une précision médiocre, il est possible de simplifier considérablement le

modèle qui devient d'un usage beaucoup plus commode. Pour cela, deux méthodes sont possibles.

### ■ Première simplification

En partant du schéma avec inductances de fuites totalisées au rotor, on déplace la branche  $R_f, L_s$  à l'entrée comme on le fait pour un transformateur. Cependant, l'erreur introduite ici n'est pas négligeable à cause de l'importance du flux de fuites et du courant magnétisant (en raison de la présence de l'entrefer) : ce dernier vaut entre 25 à 40 % de l'intensité nominale pour un moteur asynchrone alors qu'il ne dépasse pas 2 à 5 % de l'intensité nominale pour un transformateur. Le schéma est toutefois bien simplifié car les résistances  $R_s$  et  $R_r''/g$  sont maintenant en série (figure 8.9).

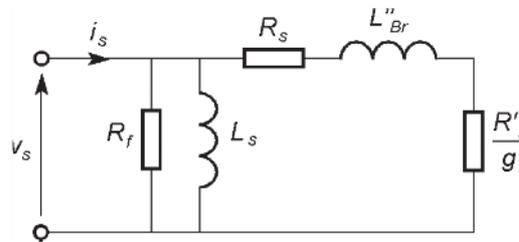


Figure 8.9 – Simplification du schéma par report de la branche  $R_f, L_s$  à l'entrée.

### ■ Seconde simplification

Pour des calculs faits au voisinage du point nominal de la machine, le glissement est faible et il est alors légitime de négliger  $R_s$  devant  $R_r''/g$  (figure 8.10). Cette approximation ne doit bien sûr pas être faite si le glissement varie dans une large plage.

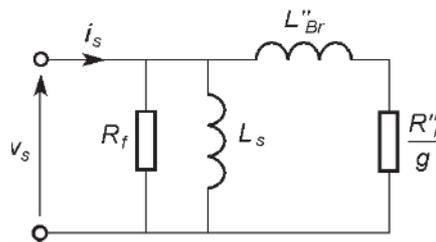


Figure 8.10 – Simplification du schéma par omission de la résistance du stator.

### ■ Notations allégées

Souvent, il n'est pas nécessaire de connaître l'origine des différents paramètres du modèle car ceux-ci sont déterminés par des essais. Il est alors commode de simplifier les notations en évitant les différents indices introduits jusqu'ici (figure 8.11).

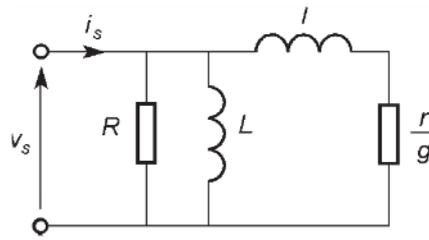


Figure 8.11 – Schéma aux notations allégées.

Ce type de schéma équivalent est souvent utilisé pour une étude sur le papier car il conduit à des calculs simples. Rappelons néanmoins qu'il conduit à des résultats de précision très médiocre. Il faut donc le manier avec précautions et l'éviter pour une modélisation numérique de la machine quand la relative complication des calculs n'a que peu d'importance.

## 8.3 Puissances et rendement

### 8.3.1 Bilan des puissances actives

La puissance active appelée par le moteur au réseau est :

$$P_s = 3 V_s I_s \cos \varphi_s$$

Le stator est le siège de pertes ferromagnétiques  $p_{fs}$  et de pertes par effet Joule  $p_{js}$  :

$$p_{js} = 3 R_s I_s^2$$

La puissance électromagnétique transmise à travers l'entrefer est :

$$P_e = P_s - p_{js} - p_{fs}$$

Le rotor est le siège de pertes ferromagnétiques  $p_{fr}$  et de pertes par effet Joule  $p_{jr}$  :

$$p_{jr} = 3 R_r I_r^2$$

La puissance mécanique interne (c'est-à-dire la partie de la puissance électrique transformée en puissance mécanique) est :

$$P_m = P_e - p_{jr} - p_{fr}$$

Pour obtenir la puissance utile  $P_u$ , c'est-à-dire celle qui est utilisable par la charge entraînée, il reste à retrancher les pertes mécaniques  $p_m$  :

$$P_u = P_m - p_m$$

Ce bilan permet de tracer le diagramme des puissances (*figure 8.12*).

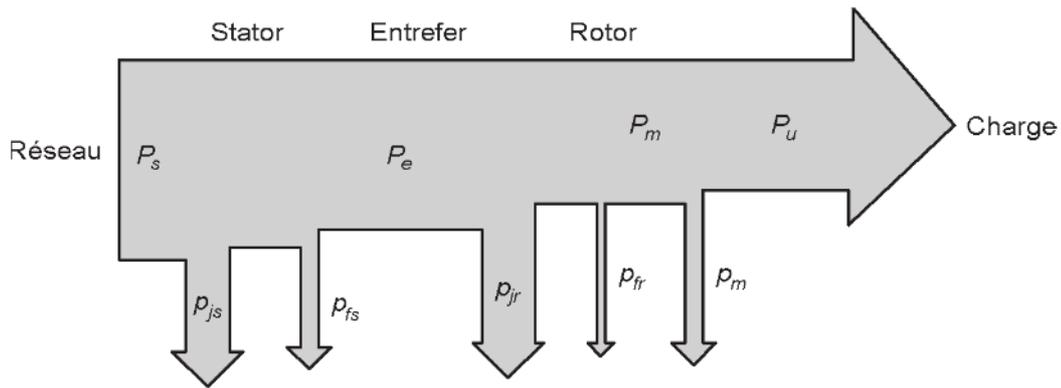


Figure 8.12 – Diagramme des puissances.

Lorsque le moteur est branché sur le réseau, le glissement en fonctionnement normal est faible. La fréquence  $f_r = g f_s$  des courants rotoriques est beaucoup plus petite que celle des courants statoriques  $f_s$  et les pertes ferromagnétiques au rotor sont alors négligeables. Par contre, quand le moteur est alimenté par un convertisseur électronique, ces pertes interviennent beaucoup plus.

### 8.3.2 Relation entre puissance transmise et pertes par effet Joule au rotor

Dans les schémas monophasés équivalents, la puissance électromagnétique transmise à travers l'entrefer est fournie à la résistance  $\frac{R_r'}{g}$ . Son expression est donc :

$$P_e = 3 \frac{R_r'}{g} I_r'^2$$

Les pertes par effet Joule au rotor s'expriment donc en fonction de cette puissance transmise et du glissement :

$$p_{jr} = g P_e$$

Cette expression montre que les fonctionnements à glissement élevé augmentent les pertes par effet Joule au rotor.

### 8.3.3 Relation entre puissance transmise et puissance mécanique interne

Quand les pertes ferromagnétiques au rotor sont négligeables, nous pouvons écrire :

$$P_m = P_e - p_{jr}$$

soit :

$$P_m = (1 - g) P_e$$

Cette relation reste sensiblement vérifiée lorsque les pertes ferromagnétiques au rotor ne sont pas négligeables.

### 8.3.4 Bilan des puissances réactives

La puissance réactive appelée par le moteur au réseau est :

$$Q_s = 3V_s I_s \sin \varphi_s$$

Elle est la somme de la puissance réactive  $Q_m$  consommée pour l'aimantation du circuit magnétique principal et des puissances réactives  $3l_s \omega_s I_s^2$  et  $3l_r \omega_s I_r^2$  nécessaires pour les circuits magnétiques de fuites :

$$Q_s = Q_m + 3l_s \omega_s I_s^2 + 3l_r \omega_s I_r^2$$

Les trois termes de la somme étant positifs, nous constatons qu'une machine asynchrone consomme toujours de la puissance réactive, quel que soit son type de fonctionnement.

### 8.3.5 Rendement

Le rendement est défini le rapport de la puissance utile à la puissance appelée par le moteur :

$$\eta = \frac{P_u}{P_s}$$

Remarquons que la puissance utile  $P_u$  est inférieure à la puissance mécanique interne  $P_m$  et que la puissance active appelée par le moteur au réseau  $P_s$  est supérieure à la puissance électromagnétique transmise à travers l'entrefer  $P_e$  et que nous avons ainsi :

$$\frac{P_u}{P_s} < \frac{P_m}{P_e}$$

soit :

$$\eta < 1 - g$$

Cette inégalité montre de nouveau l'intérêt d'un fonctionnement à faible glissement.

## 8.4 Couple électromagnétique

### 8.4.1 Principe du calcul

Le moment du couple électromagnétique est égal au quotient de la puissance mécanique interne  $P_m$  par la vitesse de rotation du rotor  $\omega_m$  :

$$\gamma = \frac{P_m}{\omega_m}$$

La vitesse de rotation du rotor  $\omega_m$  s'exprime en fonction du glissement  $g$  et de vitesse synchrone  $\Omega_S$  :

$$\omega_m = (1 - g)\Omega_S$$

Tenons compte ensuite de la relation entre la puissance mécanique interne  $P_m$ , la puissance transmise  $P_e$  au rotor et le glissement  $g$  :

$$P_m = (1 - g)P_e$$

Nous obtenons :

$$\gamma = \frac{P_e}{\Omega_S}$$

Le moment du couple électromagnétique est égal au quotient de la puissance transmise  $P_e$  au rotor par la vitesse synchrone  $\Omega_S$ . Il reste ensuite à exprimer la puissance transmise  $P_e$  à l'aide d'un des modèles équivalents du moteur.

Dans le modèle avec inductances de fuites partielles, c'est la résistance  $\frac{R'_r}{g}$  qui consomme la puissance transmise :

$$\gamma = \frac{3 \frac{R'_r}{g} I_r'^2}{\Omega_S}$$

Dans le modèle avec inductances de fuites totalisées au rotor, c'est la résistance  $\frac{R''_r}{g}$  qui consomme la puissance transmise :

$$\gamma = \frac{3 \frac{R''_r}{g} I_r''^2}{\Omega_S}$$

### 8.4.2 Transformation du schéma équivalent par le théorème de Thévenin

Le calcul de  $I'_r$  se fait avec le schéma équivalent. Comme on l'a signalé plus haut, il faut conserver le schéma équivalent exact pour avoir un résultat précis, malgré la relative complexité du calcul. Choisissons de partir du modèle avec inductances de fuites partielles et appliquons le théorème de Thévenin à une partie du circuit, après passage aux grandeurs complexes (*figure 8.13*).

Posons :

$$x_s = l_s \omega_s$$

$$x'_r = l'_r \omega$$

$$X_m = L_m \omega_s$$

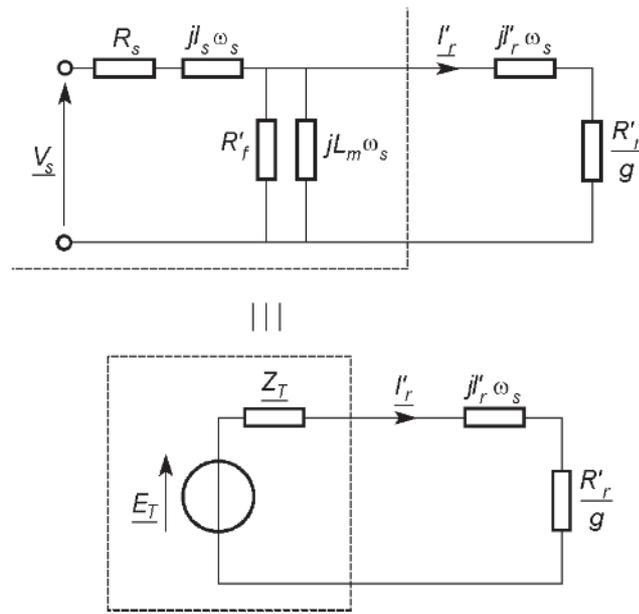


Figure 8.13 – Transformation du schéma équivalent par le théorème de Thévenin.

La force électromotrice  $\underline{E}_T$  et l'impédance  $\underline{Z}_T$  du générateur de Thévenin s'expriment par :

$$\underline{E}_T = \frac{\frac{j X_m}{1 + j \frac{X_m}{R'_f}} V_s}{R_s + j x_s + \frac{j X_m}{1 + j \frac{X_m}{R'_f}}}$$

$$\underline{Z}_T = \frac{(R_s + j x_s) \frac{j X_m}{1 + j \frac{X_m}{R'_f}}}{R_s + j x_s + \frac{j X_m}{1 + j \frac{X_m}{R'_f}}}$$

Pour des moteurs de faible puissance, il faut conserver les formules complètes. Par contre, pour des moteurs de forte ou de moyenne puissance, l'influence des pertes ferromagnétiques est minime et donc  $R'_f$  est assez élevée pour pouvoir simplifier les expressions :

$$\underline{E}_T = \frac{j X_m}{R_s + j (X_m + x_s)} V_s$$

$$\underline{Z}_T = \frac{(R_s + jx_s)jX_m}{R_s + j(X_m + x_s)}$$

Dans tous les cas, nous mettons l'impédance sous forme cartésienne :

$$\underline{Z}_T = R_T + jX_T$$

### 8.4.3 Expression du moment du couple

Nous pouvons exprimer le courant :

$$\underline{I}'_r = \frac{\underline{E}_T}{\underline{Z}_T + \frac{R'_r}{g} + jx'_r} = \frac{\underline{E}_T}{R_T + \frac{R'_r}{g} + j(X_T + x'_r)}$$

et sa valeur efficace :

$$I'_r = \frac{E_T}{\sqrt{\left(R_T + \frac{R'_r}{g}\right)^2 + (X_T + x'_r)^2}}$$

Nous en déduisons l'expression le moment du couple électromagnétique :

$$\gamma = \frac{3 \frac{R'_r}{g} E_T^2}{\Omega_S \left[ \left(R_T + \frac{R'_r}{g}\right)^2 + (X_T + x'_r)^2 \right]}$$

Le moment du couple électromagnétique est proportionnel à  $E_T^2$ , donc au carré de la tension efficace  $V_s$  appliquée au stator du moteur asynchrone.

### 8.4.4 Courbe du moment du couple en fonction du glissement

#### ■ Couple aux faibles glissements

Aux faibles glissements (qui correspondent au fonctionnement normal du moteur), le moment du couple électromagnétique est proportionnel au glissement :

$$\gamma \approx \frac{3E_T^2 g}{\Omega_S R'_r}$$

Cette formule très simple est importante car elle s'applique systématiquement pour le régime nominal du moteur.

### ■ Couple maximal

Le moment du couple électromagnétique est maximal lorsque la puissance dans la résistance  $\frac{R'_r}{g}$  est maximale. Avec le schéma équivalent de Thévenin, il s'agit de la condition d'adaptation en puissance d'un générateur à sa charge (figure 8.14).

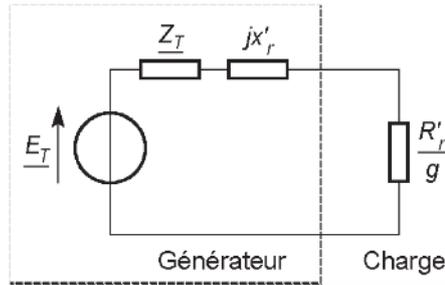


Figure 8.14 – Séparation de la charge  $\frac{R'_r}{g}$  et du générateur qui l'alimente.

Comme la charge est résistive, la condition est que la résistance de charge soit égale au module de l'impédance du générateur, ce qui s'écrit ici :

$$\sqrt{R_T^2 + (X_T + x'_r)^2} = \frac{R'_r}{g}$$

Le glissement  $g_m$  qui rend maximal le moment du couple est ainsi :

$$g_m = \frac{R'_r}{\sqrt{R_T^2 + (X_T + x'_r)^2}}$$

Nous en déduisons le moment maximal  $\gamma_{\max}$  du couple :

$$\gamma_{\max} = \frac{3E_T^2}{2\Omega_S [R_T + \sqrt{R_T^2 + (X_T + x'_r)^2}]}$$

Le glissement correspondant au couple maximal est proportionnel à la résistance du circuit du rotor, mais le moment du couple maximal est indépendant de cette résistance.

Si le moment du couple extérieur devient supérieur à  $\gamma_{\max}$ , la machine décroche. De ce fait,  $g_m$  est nommé glissement au décrochage et  $\gamma_{\max}$  moment du couple de décrochage.

### ■ Couple de démarrage

Au démarrage, la vitesse du rotor est nulle et donc le glissement vaut 1. Nous en déduisons l'expression du moment du couple de démarrage :

$$\gamma_d = \frac{3 R_r' E_T^2}{\Omega_S [(R_T + R_r')^2 + (X_T + x_r')^2]}$$

### ■ Tracé de la courbe

La formule établie plus haut permet le tracé de la courbe du moment du couple en fonction du glissement, celui-ci étant compris entre 0 et 1 pour un fonctionnement en moteur (*figure 8.15*).

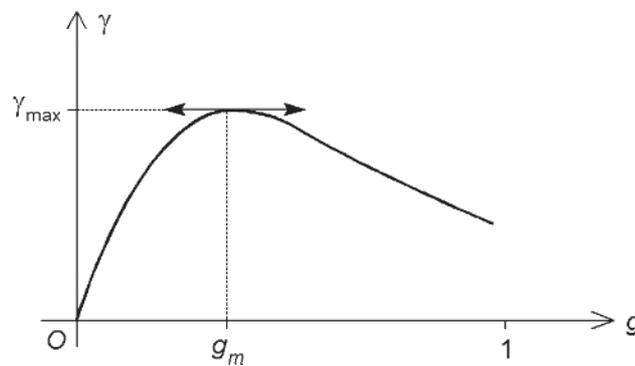


Figure 8.15 – Courbe du moment du couple en fonction du glissement pour un fonctionnement en moteur.

### ■ Extension du fonctionnement

Dans certains fonctionnements particuliers, il est possible d'obtenir des valeurs de glissement en dehors de l'intervalle considéré jusqu'à présent : un glissement supérieur à 1 correspond à un fonctionnement en freinage (inversion du sens de rotation de la tension magnétique tournante du stator) et un glissement négatif se rencontre dans un fonctionnement en générateur (entraînement de la machine par sa charge à une vitesse supérieure à la vitesse de synchronisme). On peut compléter la courbe de couple (*figure 8.16*).

La courbe est symétrique par rapport au point O puisque la fonction est impaire.

### ■ Caractéristique mécanique

Les caractéristiques des charges mécaniques représentent le moment du couple résistant en fonction de la vitesse de rotation. Il est donc commode d'utiliser le même type de coordonnées pour caractériser le moteur. Compte tenu de la relation entre glissement et vitesse, on trace la courbe du moment du couple en fonction de la vitesse de rotation (*figure 8.17*).

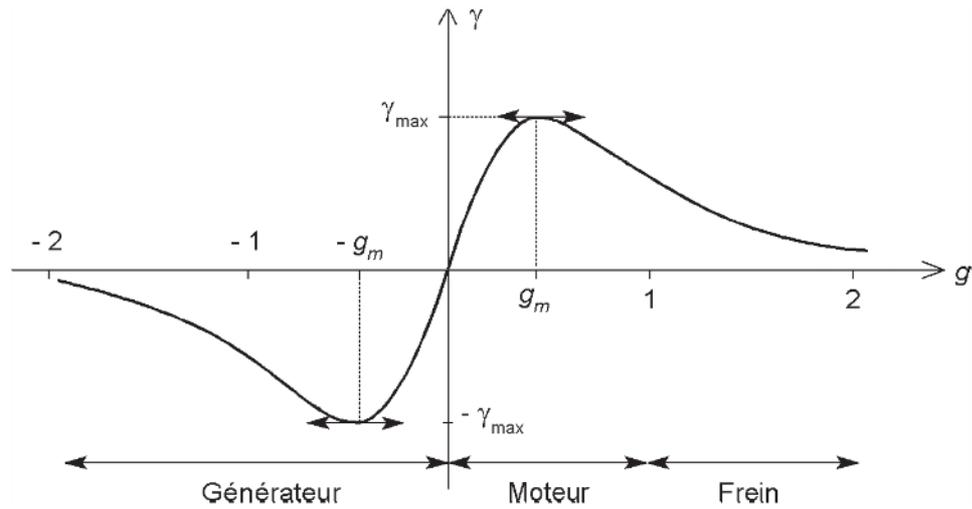


Figure 8.16 – Courbe de couple étendue aux fonctionnements en frein et en générateur.

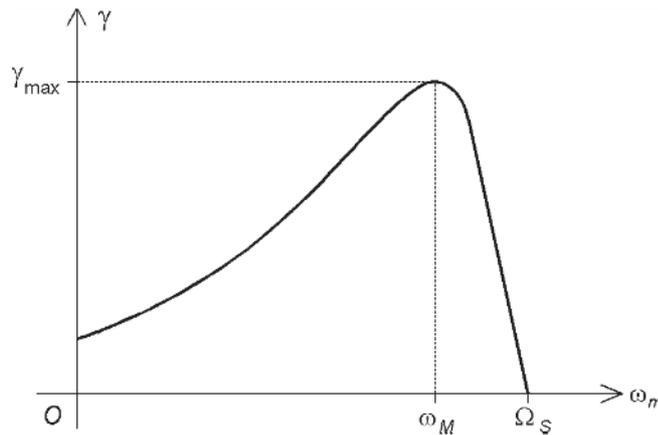


Figure 8.17 – Courbe du moment du couple en fonction de la vitesse de rotation.

### ■ Caractéristique réduite

Il est parfois intéressant de travailler avec des variables réduites en rapportant le moment du couple à son maximum et le glissement à la valeur qui correspond à ce maximum. Nous pouvons ainsi écrire :

$$\frac{\gamma}{\gamma_{\max}} = \frac{2[R_T + \sqrt{R_T^2 + (X_T + x_r')^2}] R_r'}{\left(R_T + \frac{R_r'}{g}\right)^2 + (X_T + x_r')^2 g}$$

$$\frac{\gamma}{\gamma_{\max}} = \frac{2[R_T + \sqrt{R_T^2 + (X_T + x_r')^2}]}{gR_T^2 + \frac{R_r'^2}{g} + 2R_T R_r' + g(X_T + x_r')^2} R_r'$$

Introduisons le paramètre  $g_m$  en remplaçant :

$$R'_r = g_m \sqrt{R_T^2 + (X_T + x'_r)^2}$$

Cela donne :

$$\frac{\gamma}{\gamma_{\max}} = \frac{2[R_T + \sqrt{R_T^2 + (X_T + x'_r)^2}] \sqrt{R_T^2 + (X_T + x'_r)^2}}{\frac{g_m}{g} [R_T^2 + (X_T + x'_r)^2] + \frac{g}{g_m} [R_T^2 + (X_T + x'_r)^2] + 2R_T \sqrt{R_T^2 + (X_T + x'_r)^2}}$$

Posons alors :

$$\varepsilon = \frac{R_T}{\sqrt{R_T^2 + (X_T + x'_r)^2}}$$

La formule se simplifie :

$$\frac{\gamma}{\gamma_{\max}} = \frac{2(1 + \varepsilon)}{\frac{g_m}{g} + \frac{g}{g_m} + 2\varepsilon}$$

Compte tenu que le paramètre  $\varepsilon$  est relativement faible, une expression approchée peut souvent être utilisée :

$$\frac{\gamma}{\gamma_{\max}} \approx \frac{2}{\frac{g_m}{g} + \frac{g}{g_m}}$$

#### Remarque

Cette formule aurait été établie beaucoup plus rapidement en utilisant dès le départ un schéma équivalent simplifié qui néglige l'effet de la résistance statorique ou qui reporte l'inductance magnétisante à l'entrée, mais nous n'aurions alors pas pu chiffrer l'erreur commise et les expressions obtenues pour  $\gamma_{\max}$  et  $g_m$  auraient été beaucoup moins précises.

### 8.4.5 Autres expressions

Il y a d'autres façons d'exprimer le moment du couple électromagnétique. Considérons par exemple le modèle avec inductances de fuites totalisées au rotor. Le courant rotorique ramené au stator  $\underline{I}_r''$  s'exprime en fonction de la tension statorique interne  $\underline{V}'_s$  :

$$\underline{I}_r'' = \frac{\underline{V}'_s}{\frac{R_r''}{g} + jL''_{Br}\omega_s}$$

Nous obtenons l'intensité efficace en prenant le module de cette relation :

$$I_r'' = \frac{V_s'}{\sqrt{\frac{R_r''^2}{g^2} + L_{Br}''^2 \omega_s^2}}$$

Nous en déduisons le moment du couple électromagnétique par :

$$\gamma = \frac{3 \frac{R_r''}{g} I_r''^2}{\Omega_s}$$

soit :

$$\gamma = \frac{3}{\Omega_s} \frac{\frac{R_r''}{g}}{\frac{R_r''^2}{g^2} + L_{Br}''^2 \omega_s^2} V_s'^2$$

Remplaçons la valeur efficace de la tension statorique interne  $V_s'$  par son expression en fonction de la valeur efficace  $\Psi_s$  du flux total statorique :

$$\gamma = 3p \omega_s \frac{\frac{R_r''}{g}}{\frac{R_r''^2}{g^2} + L_{Br}''^2 \omega_s^2} \Psi_s^2$$

#### 8.4.6 Cas d'une alimentation en courant

Quand le courant statorique est imposé, il est intéressant d'utiliser une formule différente pour le moment du couple électromagnétique. Considérons par exemple le modèle avec inductances de fuites totalisées au rotor. Comme précédemment, il faut calculer la puissance transmise au rotor. Pour cela, exprimons le courant rotorique ramené au stator  $I_r''$  par la formule du diviseur de courant :

$$\frac{I_r''}{I_s} = \frac{jL_s \omega_s}{\frac{R_r''}{g} + j(L_s + L_{Br}'') \omega_s} I_s$$

Nous obtenons l'intensité efficace en prenant le module de cette relation :

$$I_r'' = \frac{L_s \omega_s}{\sqrt{\frac{R_r''^2}{g^2} + (L_s + L_{Br}'')^2 \omega_s^2}} I_s$$

Nous en déduisons le moment du couple électromagnétique par :

$$\gamma = \frac{3 \frac{R_r''}{g} I_r''^2}{\Omega_s}$$

soit :

$$\gamma = \frac{3}{\Omega_s} \frac{\frac{R_r''}{g} L_s^2 \omega_s^2}{\frac{R_r''^2}{g^2} + (L_s + L_{Br}'')^2 \omega_s^2} I_s^2$$

Remplaçons la vitesse synchrone  $\Omega_s$  par  $\frac{\omega_s}{p}$  :

$$\gamma = 3p \frac{\frac{R_r''}{g} L_s^2 \omega_s^2}{\frac{R_r''^2}{g^2} + (L_s + L_{Br}'')^2 \omega_s^2} I_s^2$$

## 8.5 Influence des harmoniques

Dans un entraînement à vitesse variable, le convertisseur électronique alimente le moteur avec des tensions ou des courants périodiques, mais non sinusoïdaux. Il nous faut donc modéliser la machine dans ce cas.

### 8.5.1 Schéma monophasé équivalent

Le fondamental crée un champ tournant à la vitesse synchrone  $\frac{\omega_s}{p}$ ,  $\omega_s$  étant la pulsation des courants statoriques et  $p$  le nombre de paires de pôles de la machine. Dans un fonctionnement normal, le glissement  $g$  reste faible. Le rotor tourne à une vitesse  $\omega_m$  légèrement inférieure à la vitesse synchrone :

$$\omega_m = (1 - g) \frac{\omega_s}{p}$$

Comme nous l'avons montré au paragraphe 3.3.2, certains harmoniques du courant créent des champs tournants.

Les composantes de rang  $n = 6l + 1$  ( $l \in \mathbb{N}$ ) donnent naissance à des tensions magnétiques tournantes directes à la vitesse  $\frac{n\omega_s}{p}$ .

Le glissement correspondant est :

$$g_n = \frac{\frac{n\omega_s}{p} - (1-g)\frac{\omega_s}{p}}{\frac{n\omega_s}{p}} = \frac{n - (1-g)}{n}$$

Compte tenu de la faible valeur de  $g$ , nous avons approximativement :

$$g_n \approx \frac{n-1}{n}$$

Les composantes de rang  $n = 6l - 1$  ( $l \in \mathbb{N}^*$ ) donnent naissance à des tensions magnétiques tournantes inverses à la vitesse  $-\frac{n\omega_s}{p}$ . Le glissement correspondant est :

$$g_n = \frac{-\frac{n\omega_s}{p} - (1-g)\frac{\omega_s}{p}}{-\frac{n\omega_s}{p}} = \frac{n + (1-g)}{n}$$

Compte tenu de la faible valeur de  $g$ , nous avons approximativement :

$$g_n \approx \frac{n+1}{n}$$

Comme les valeurs de  $n$  sont nettement supérieures à 1 (5 ; 7 ; 11...), le glissement  $g_n$  relatif à la composante de rang  $n$  est de l'ordre de 1 :

$$g_5 \approx \frac{6}{5} \quad g_7 \approx \frac{6}{7}$$

Le comportement du moteur asynchrone vis-à-vis de l'harmonique de rang  $n$  peut être décrit par un schéma monophasé équivalent similaire à celui qui est utilisé pour une alimentation sinusoïdale, mais avec une résistance  $\frac{R'_r}{g_n}$  faisant intervenir le glissement  $g_n$  relatif à la composante de rang  $n$  (figure 8.18). Comme  $g_n$  est voisin de 1, cette résistance est de l'ordre de  $R'_r$ .

En conséquence, l'impédance de la branche formée par  $\frac{R'_r}{g_n}$  et  $l'_r$  est beaucoup plus faible que l'impédance de la branche formée par  $L_m$  :

$$\sqrt{\left(\frac{R'_r}{g_n}\right)^2 + (l'_r n \omega_s)^2} \ll L_m n \omega_s$$

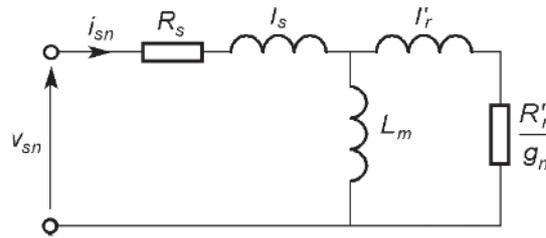


Figure 8.18 – Schéma monophasé équivalent pour l'harmonique de rang  $n$ .

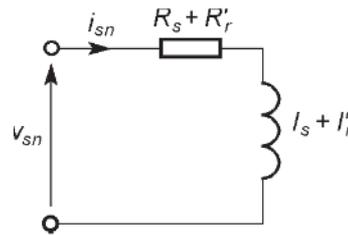


Figure 8.19 – Schéma monophasé équivalent simplifié pour l'harmonique de rang  $n$ .

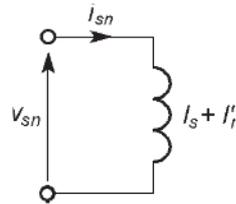


Figure 8.20 – Schéma monophasé équivalent très simplifié pour l'harmonique de rang  $n$ .

Le schéma monophasé équivalent peut alors se simplifier (figure 8.19). En première approximation, l'effet de la résistance est également négligeable (figure 8.20) :

$$\frac{R'_r}{g_n} \ll l'_r n \omega_s$$

Remarquons que ce schéma simplifié ne dépend pas du rang de l'harmonique. Il s'applique donc au signal formé par l'ensemble des harmoniques.

### 8.5.2 Couples moyens dus aux harmoniques

Chaque harmonique pris séparément crée un couple moyen, mais nous allons montrer que la valeur de son moment est négligeable devant la valeur du moment du couple dû au fondamental.

Le moment du couple est le quotient de la puissance traversant l'entrefer par la vitesse synchrone.

Ainsi, le moment du couple dû au fondamental est :

$$\gamma_1 = \frac{3 \frac{R'_r}{g} I'_{r1}}{\frac{\omega_s}{p}}$$

Les composantes de rang  $n = 6l + 1$  ( $l \in \mathbb{N}$ ) donnent naissance à des tensions magnétiques tournantes directes à la vitesse  $\frac{n\omega_s}{p}$ . Le moment du couple dû à un tel harmonique est :

$$\gamma_n = \frac{3 \frac{R'_r}{g_n} I'_{rn}}{\frac{n\omega_s}{p}}$$

Le moment de ce couple est positif.

Les composantes de rang  $n = 6l - 1$  ( $l \in \mathbb{N}^*$ ) donnent naissance à des tensions magnétiques tournantes inverses à la vitesse  $-\frac{n\omega_s}{p}$ . Le moment du couple dû à un tel harmonique est :

$$\gamma_n = \frac{3 \frac{R'_r}{g_n} I'_{rn}}{-\frac{n\omega_s}{p}}$$

Le moment de ce couple est négatif.

Ces moments des couples harmoniques ont néanmoins des valeurs absolues très faibles par rapport au moment du couple dû au fondamental. En effet, calculons leur rapport :

$$\frac{|\gamma_n|}{\gamma_1} = \frac{1}{n} \frac{g}{g_n} \frac{I'_{rn}}{I'_{r1}}$$

Or, d'une part, le glissement  $g$  est petit devant 1 alors que le glissement  $g_n$  est voisin de 1 et d'autre part, l'intensité efficace  $I'_{rn}$  de l'harmonique de rang  $n$  est faible devant l'intensité efficace  $I'_{r1}$  du fondamental du courant, et ce d'autant plus que  $n$  est grand. Le rapport calculé est bien extrêmement faible. Dans ce raisonnement, nous n'avons pas tenu de la variation de la résistance  $R'_r$  avec la fréquence du fait de l'effet de peau. Celui-ci intervient pour les harmoniques, et ce d'autant plus que leur rang est élevé. La formule donnée pour le rapport n'est alors plus tout à fait exacte, mais le résultat qualitatif est toujours valable.

### 8.5.3 Couples pulsatoires dus aux harmoniques

Les couples résultant des interactions entre fondamental et harmoniques et entre harmoniques de rangs différents sont de nature pulsatoire : leur valeur moyenne est nulle.

Reprenons l'expression du moment du couple obtenue au paragraphe 7.3.4 :

$$\gamma = I_s \frac{dM_{sr}}{d\theta} I_r$$

avec :

$$M_{sr} = M_{sr} \begin{bmatrix} \cos\theta_e & \cos\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\theta_e & \cos\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\theta_e \end{bmatrix}$$

et, en régime sinusoïdal permanent :

$$I_s = I_{sM} \begin{bmatrix} \cos(\omega_s t - \varphi) \\ \cos\left(\omega_s t - \varphi - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\omega_s t - \varphi + \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix}$$

$$I_r = I_{rM} \begin{bmatrix} \cos(\omega_r t - \beta) \\ \cos\left(\omega_r t - \beta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\omega_r t - \beta + \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix}$$

$\varphi$  est le déphasage du courant statorique par rapport à la tension statorique (dont la phase 1 est choisie comme origine des phases).  $\beta$  est le déphasage du courant rotorique par rapport à la tension statorique.

Dérivons d'abord la matrice des inductances mutuelles :

$$\frac{dM_{sr}}{d\theta} = p \frac{dM_{sr}}{d\theta_e} = p M_{sr} \begin{bmatrix} -\sin\theta_e & -\sin\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) \\ -\sin\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\theta_e & -\sin\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) \\ -\sin\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\theta_e \end{bmatrix}$$

Il reste à effectuer le produit matriciel et à simplifier en utilisant la formule trigonométrique ;

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

et en notant que la somme de trois fonctions trigonométriques régulièrement déphasées de  $\frac{2\pi}{3}$  est nulle. Nous obtenons :

$$\gamma = -\frac{9}{4} p M_{sr} I_s M I_r \sin[(\omega_s - \omega_r)t - \theta_e + \beta - \varphi]$$

Introduisons les valeurs efficaces  $I_s$  et  $I_r$  des courants et tenons compte du fait que le rotor tourne à la vitesse électrique  $\omega_e$  pour exprimer l'angle électrique  $\theta_e$  :

$$\theta_e = \omega_e t$$

Nous obtenons :

$$\gamma = -\frac{9}{2} p M_{sr} I_s I_r \sin[(\omega_s - \omega_r - \omega_e)t + \beta - \varphi]$$

Utilisons l'inductance mutuelle cyclique entre stator et rotor :

$$M = \frac{3}{2} M_{rs}$$

et l'intensité efficace courant rotorique ramené au stator pour le modèle avec inductances de fuites totalisées au rotor :

$$I_r'' = \frac{M}{L_s} I_r$$

L'expression du moment du couple devient :

$$\gamma = -3 p L_s I_s I_r'' \sin[(\omega_s - \omega_r - \omega_e)t + \beta - \varphi]$$

Le moment du couple correspondant à l'interaction entre le champ tournant statorique fondamental et le champ tournant rotorique harmonique de rang  $6l-1$  est ainsi :

$$\gamma_{1,6l-1} = -3pL_s I_{s1} I_{r6l-1}'' \sin[(\omega_s - \omega_{r6l-1} - \omega_e)t + \beta_{6l-1} - \varphi_1]$$

Le moment du couple correspondant à l'interaction entre champ tournant rotorique fondamental et le champ tournant statorique harmonique de rang  $6l-1$  est ainsi :

$$\gamma_{6l-1,1} = -3pL_s I_{s6l-1} I_{r1}'' \sin[(\omega_{s6l-1} - \omega_r - \omega_e)t + \beta_1 - \varphi_{6l-1}]$$

Le modèle pour les harmoniques se réduisant pratiquement aux inductances de fuites, les déphasages  $\beta_{6l-1}$  et  $\varphi_{6l-1}$  sont très voisins de  $\frac{\pi}{2}$  et le courant rotorique ramené au stator  $I_{r6l-1}''$  se confond avec le courant statorique  $I_{s6l-1}$ . La somme des moments des couples qui correspondent aux harmoniques de rang  $6l-1$  est ainsi :

$$\gamma_{1,6l-1} + \gamma_{6l-1,1} = -3pL_s I_{s6l-1} [I_{s1} \cos(6\omega_s t - \varphi_1) - I_{r1}'' \cos(6\omega_s t - \beta_1)]$$

Une étude analogue montre que les harmoniques de rang  $6l+1$  créent eux aussi un couple de pulsation  $6l\omega_s$ . Globalement, les harmoniques de rang  $6l+1$  et de rang  $6l-1$  produisent un couple pulsatoire dont le moment est de la forme :

$$\gamma_{pl} = \Gamma_l \cos(6l\omega_s t + \zeta_l)$$

En pratique, ce sont surtout les harmoniques de rangs 5 et 7 qui donnent naissance à un couple de ce type. L'interaction entre harmoniques de rangs différents conduit aussi à des couples, mais ceux-ci sont négligeables.

## 8.6 Cage d'écoreuil

La modélisation du moteur asynchrone se fait au départ en considérant que le rotor porte un enroulement triphasé, car cela facilite l'étude. Pourtant, le rotor est la plupart du temps une cage d'écoreuil. Une étude plus précise de cette cage permet de montrer que le fonctionnement obtenu est le même.

### 8.6.1 Relation entre les courants dans les barres et les courants dans les anneaux

Considérons une cage d'écoreuil qui possède  $N_b$  barres distantes d'un angle  $\alpha = \frac{2\pi}{N_b}$  (figure 8.21).

Appelons  $i_k$  l'intensité du courant dans la barre numéro  $k$  et  $j_k$  l'intensité du courant dans la partie d'anneau de court-circuit située entre les barres  $k$  et  $k+1$ . Ces grandeurs sont sinusoïdales, de pulsation  $\omega_r = g\omega_s$ . Compte tenu de la symétrie du dispositif, tous les courants dans les barres ont même intensité efficace  $I$  et tous les courants dans les portions d'anneau ont même intensité efficace  $J$ . De plus, les courants dans deux barres ou deux portions d'anneau successives sont déphasés d'un angle  $\varphi = p\alpha$ .

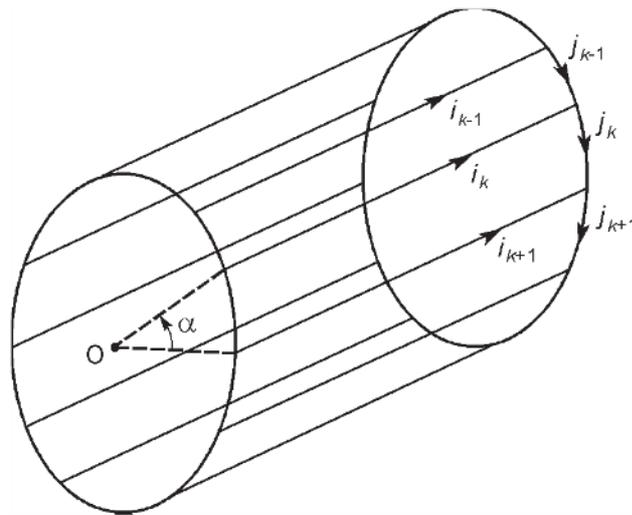


Figure 8.21 – Courants dans une cage d'écoreuil.

La loi des nœuds à la jonction de la barre  $k$  avec un anneau de court-circuit s'écrit :

$$i_k = j_k - j_{k-1}$$

Nous pouvons ainsi tracer le diagramme de Fresnel qui correspond à une étoile pour les courants dans les portions d'anneau et à un polygone pour les courants dans les barres (figure 8.22).

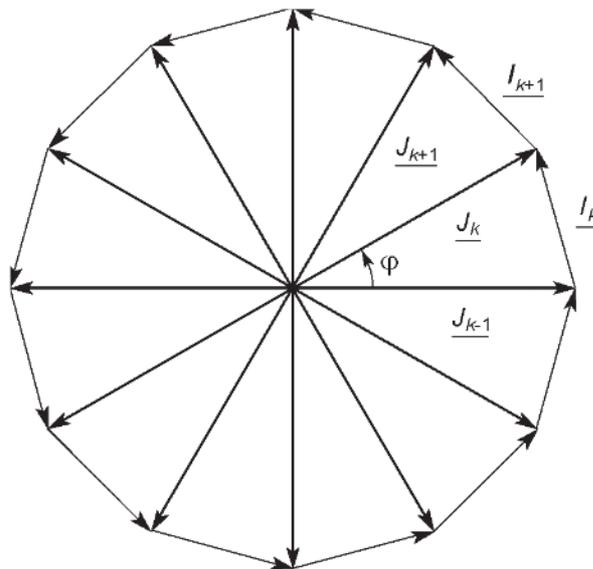


Figure 8.22 – Diagramme de Fresnel des courants dans une cage.

Utilisons les grandeurs complexes pour effectuer la différence :

$$\underline{I}_k = \underline{J}_k - \underline{J}_{k-1}$$

$$\underline{J}_{k-1} = \underline{J}_k e^{-j\varphi}$$

Nous en déduisons :

$$\underline{I}_k = \underline{J}_k (1 - e^{-j\varphi})$$

$$\underline{I}_k = 2 \underline{J}_k e^{-j\frac{\varphi}{2}} j \frac{e^{j\frac{\varphi}{2}} - e^{-j\frac{\varphi}{2}}}{2j}$$

L'expression devient finalement :

$$\underline{I}_k = 2 \underline{J}_k e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right)} \sin \frac{\varphi}{2}$$

Pour les valeurs efficaces, la relation est donc :

$$I = 2J \sin \frac{\varphi}{2}$$

Cette formule peut être mise sous la forme :

$$I = 2J \sin \frac{p\alpha}{2}$$

ou encore :

$$I = 2J \sin p \frac{\pi}{N_b}$$

Cette dernière relation est connue sous le nom de formule d'Arnold.

### 8.6.2 Impédance équivalente à une barre

Chaque barre a une résistance  $r_b$  et une inductance de fuites  $l_b$  et chaque portion d'anneau a une résistance  $r_a$  et une inductance de fuites  $l_a$ . La barre numéro  $k$  est le siège d'une force électromotrice induite  $e_k$ . Utilisons les grandeurs complexes et posons :

$$\underline{z}_a = r_a + j l_a \omega_r$$

$$\underline{z}_b = r_b + j l_b \omega_r$$

Appliquons la loi des mailles à un circuit formé des barres  $k$  et  $k+1$  et des portions d'anneau qui les relient (*figure 8.23*) :

$$\underline{E}_k - \underline{E}_{k+1} = \underline{z}_b \underline{I}_k + \underline{z}_a \underline{J}_k - \underline{z}_b \underline{I}_{k+1} + \underline{z}_a \underline{J}_k$$

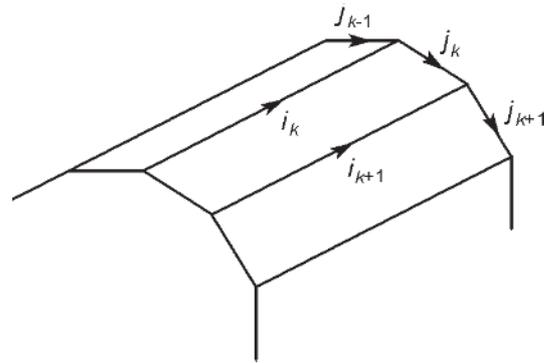


Figure 8.23 – Maille passant par deux barres.

Par ailleurs, nous avons :

$$\underline{E}_{k+1} = \underline{E}_k e^{j\varphi}$$

$$\underline{I}_{k+1} = \underline{I}_k e^{j\varphi}$$

$$\underline{I}_k = 2 \underline{J}_k \sin \frac{\varphi}{2} e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right)}$$

En remplaçant dans la loi des mailles, nous obtenons :

$$\underline{E}_k (1 - e^{j\varphi}) = \underline{z}_b \underline{I}_k (1 - e^{j\varphi}) + \frac{\underline{z}_a \underline{I}_k}{\sin \frac{\varphi}{2} e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right)}}$$

$$\underline{E}_k = \underline{z}_b \underline{I}_k + \frac{\underline{z}_a}{2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \underline{I}_k$$

Cette relation est de la forme :

$$\underline{E}_k = \underline{Z} \underline{I}_k$$

en posant :

$$\underline{Z} = \underline{z}_b + \frac{\underline{z}_a}{2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$

Cela montre que tout se passe comme si chaque barre était court-circuitée sur elle-même et présentait une impédance fictive  $\underline{Z}$ , appelée impédance équivalente à une barre.

### 8.6.3 Tension magnétique tournante

Le rotor n'a pas un nombre de pôles défini : il prend le nombre de pôle du stator. Choisissons le cas d'un moteur bipolaire : le cas général s'en déduit avec la notion d'angle électrique. Considérons un ensemble de deux barres diamétralement opposées (*figure 8.24*).

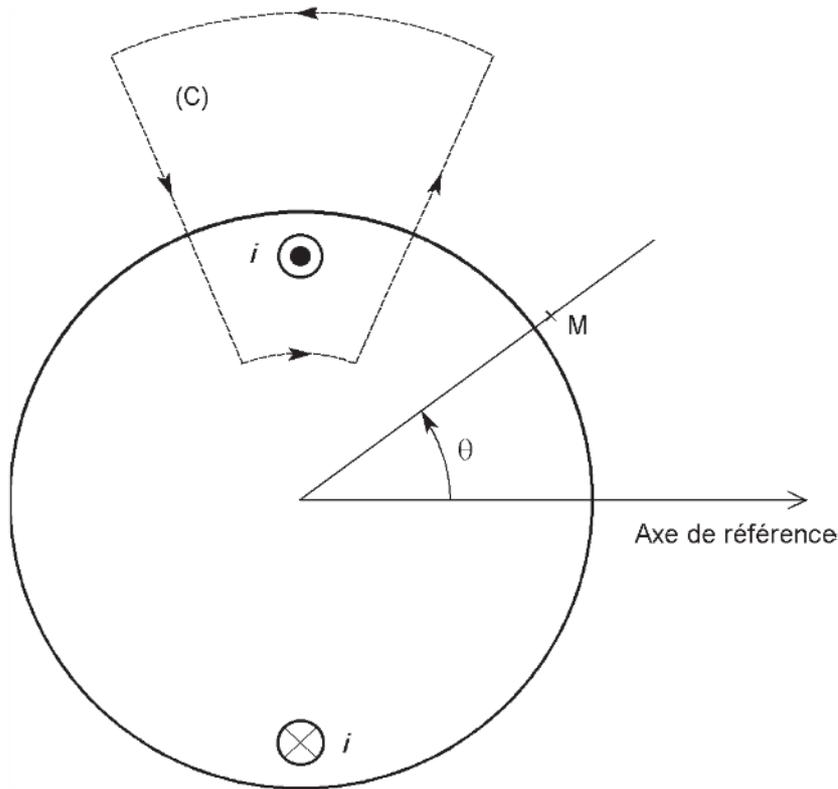


Figure 8.24 – Ensemble de deux barres d'une cage.

Le théorème d'Ampère appliqué au contour (C) permet d'écrire, en négligeant la circulation du vecteur excitation dans les parties ferromagnétiques :

$$H_1 e - H_2 e = i$$

Nous pouvons alors tracer la courbe de la tension magnétique d'entrefer due à l'ensemble des deux barres,  $\mathcal{U} = He$  en fonction de l'angle  $\theta$ . Cette grandeur subit une discontinuité de  $i$  au passage du conducteur et sa valeur moyenne est nulle. Il s'agit donc d'une courbe en créneau (*figure 8.25*).

Cette fonction est décomposable en série de Fourier :

$$\mathcal{U} = \frac{2i}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos(2n+1)\theta$$

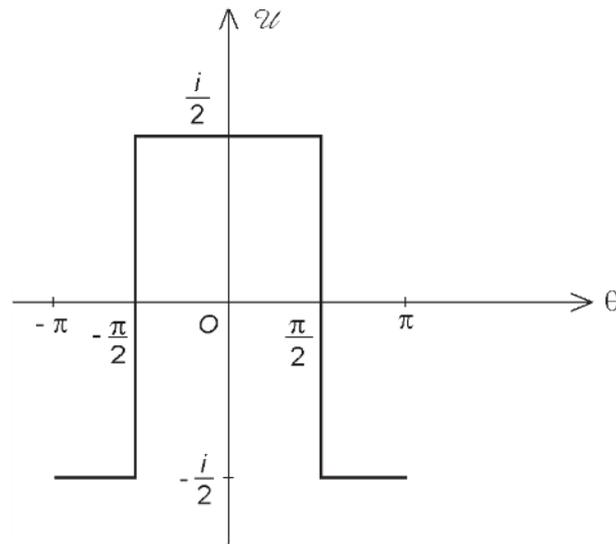


Figure 8.25 – Courbe de la tension magnétique créée par deux barres diamétralement opposées en fonction de l'angle.

Prenons comme origine des positions l'axe de l'ensemble des spires portant les numéros 1 et  $\frac{N_b}{2}$  et choisissons l'origine des temps de façon que l'intensité du courant dans la barre 1 soit de la forme :

$$i_1 = I_M \cos \omega_r t$$

Avec ces choix, la tension magnétique due à la barre numéro  $k$  et celle qui lui est diamétralement opposée est :

$$u_k = \frac{2i_k}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos(2n+1) \left[ \theta - (k-1) \frac{2\pi}{N_b} \right]$$

avec :

$$i_k = I_M \cos \left[ \omega_r t - (k-1) \frac{2\pi}{N_b} \right]$$

La tension magnétique résultante est :

$$u = \sum_{k=1}^{\frac{N_b}{2}} u_k$$

$$u = \frac{2I_M}{\pi} \sum_{k=1}^{\frac{N_b}{2}} \left\{ \cos \left[ \omega_r t - (k-1) \frac{2\pi}{N_b} \right] \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos(2n+1) \left[ \theta - (k-1) \frac{2\pi}{N_b} \right] \right\}$$

Il reste à transformer tous les produits de cosinus en utilisant la formule trigonométrique :

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)]$$

Beaucoup de termes forment des ensembles de fonctions sinusoïdales régulièrement déphasées dont la somme est nulle. Il ne reste finalement que le même terme répété  $\frac{N_b}{2}$  fois :

$$\mathcal{U} = \frac{2I_M N_b}{\pi} \frac{1}{2} \cos(\omega_r t - \theta)$$

soit :

$$\mathcal{U} = \frac{N_b I_M}{2\pi} \cos(\omega_r t - \theta)$$

Il s'agit d'une tension magnétique tournante à répartition sinusoïdale, de vitesse angulaire  $\omega_r = g\omega_s$  par rapport à la cage. Comme celle-ci se déplace à la vitesse  $\omega = (1 - g)\omega_s$ , la tension magnétique tournante a une vitesse  $\omega_r + \omega = \omega_s$  par rapport au stator : les tensions magnétiques tournantes du stator et du rotor sont bien synchrones.

Si le moteur a  $p$  paires de pôles, le résultat est identique, mais avec des angles électriques, ce qui montre que la tension magnétique tournante a alors une vitesse  $\frac{\omega_r}{p}$  par rapport au rotor.

Copyright © 2005 Dunod. Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite à l'exception des cas prévus aux termes de l'article L.122-5, 2° et 3° a) du Code de la Propriété Intellectuelle.

## 9 • MISE EN ŒUVRE DES MOTEURS ASYNCHRONES

---

Le moteur asynchrone branché sur le réseau est alimenté à fréquence fixe. Il est alors nécessaire de se préoccuper de son démarrage. Quelques procédés permettent une variation de vitesse, mais avec des performances médiocres. L'utilisation d'un moteur à rotor bobiné apporte plus de souplesse, mais reste une solution réservée à quelques usages particuliers. L'alimentation à fréquence variable par un convertisseur électronique permet d'obtenir d'excellentes performances avec un moteur à cage.

### 9.1 Moteur asynchrone à cage alimenté à fréquence fixe

#### 9.1.1 Démarrage

##### ■ Démarrage direct

La caractéristique mécanique d'un moteur asynchrone montre qu'il existe un couple à vitesse nulle. Il est donc possible de démarrer la machine en la branchant directement sur le réseau. Le moteur étant soumis brusquement à sa pleine tension, il en résulte une pointe de courant importante (5 à 8 fois l'intensité nominale). Cette surintensité de courte durée est supportée par le moteur, mais elle provoque une chute de tension dans les lignes d'alimentation, ce qui peut entraîner des perturbations sur d'autres récepteurs branchés dans le voisinage. L'adoption de ce mode de démarrage n'est donc envisageable que si ces troubles sont acceptables pour le réseau. Cette solution, quand elle est possible, est évidemment la plus simple et la moins coûteuse.

L'évolution des différentes grandeurs caractéristiques du moteur lors d'un démarrage peut être obtenue par un logiciel de simulation utilisant le modèle de Park (*figure 9.1*). Les courbes tracées permettent de préciser les contraintes subies et de chiffrer la durée de la phase de démarrage. Il faut remarquer les fortes oscillations du couple qui entraînent le bruit constaté lors du démarrage du moteur, ainsi que les pics de courant qui s'amortissent progressivement.

##### ■ Amélioration des performances au démarrage à la construction du moteur

Certains moteurs, destinés à être alimenté directement sur le secteur sont conçus de façon à améliorer leurs performances au démarrage. Deux solutions sont rencontrées : les moteurs à double cage et les moteurs à encoches profondes.

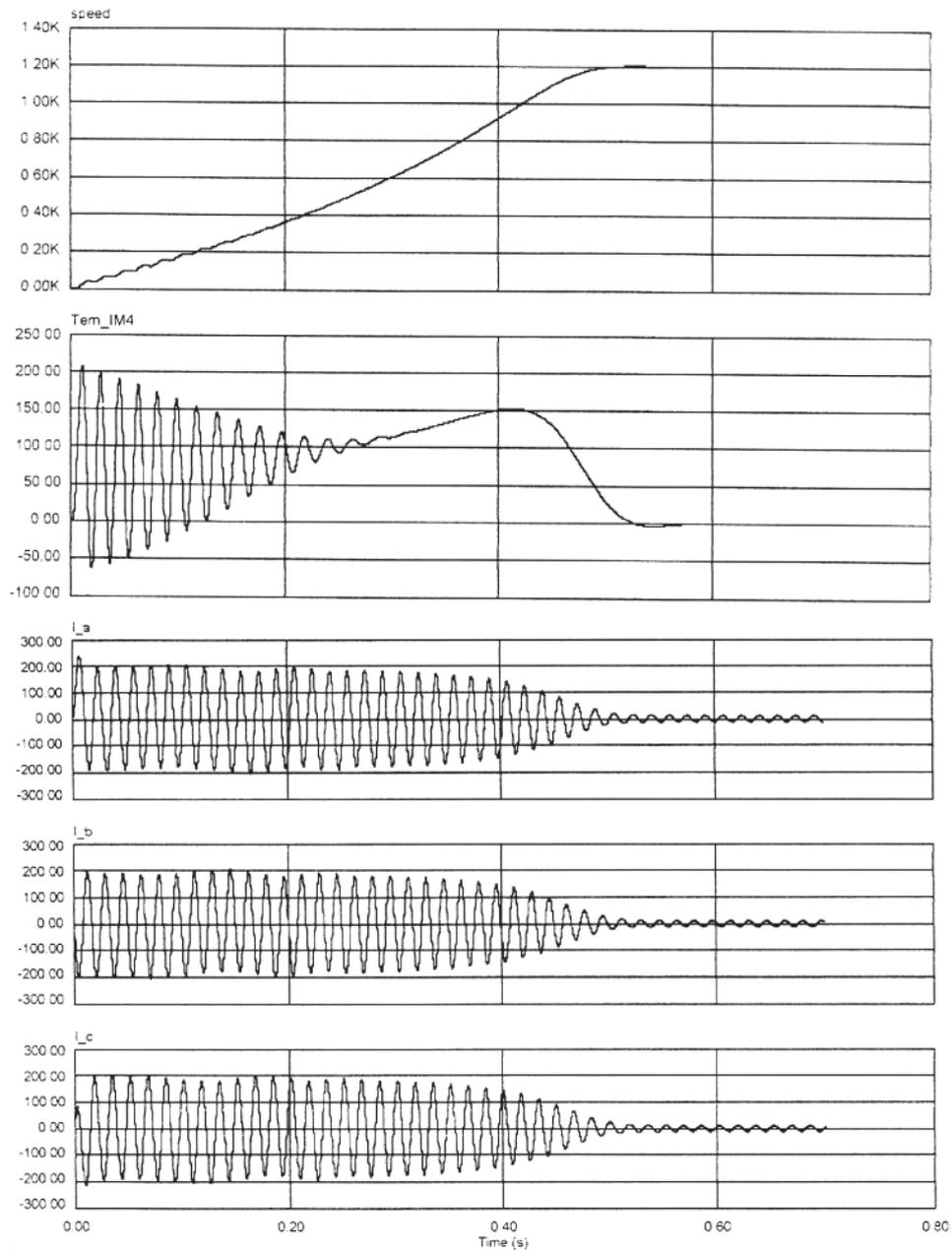


Figure 9.1 – Courbes de la vitesse de rotation, du couple électromagnétique et des courants lors d'un démarrage direct (obtenues avec le logiciel PSIM).

#### □ Moteur à double cage

##### *Principe*

Le moteur à double cage de Boucherot possède deux cages au rotor (*figure 9.2*). La cage externe (nommée cage de démarrage) a une résistance plus élevée et une inductance de fuites plus élevée que la cage interne (nommée cage de travail). Les deux cages sont reliées par un passage étroit. La différence de résistance est obtenue par une section plus faible pour les barres de la cage externe et éventuellement par une résis-

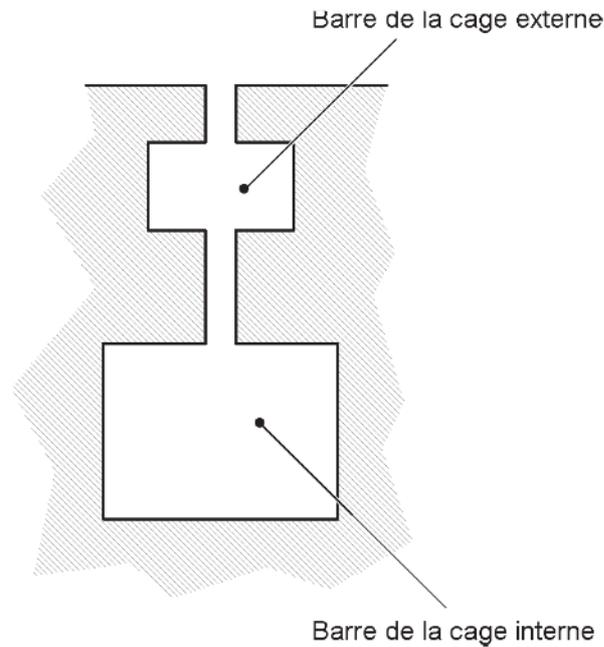


Figure 9.2 – Encoche d'un moteur à double cage.

tivité plus grande du matériau utilisé. Pendant le démarrage, les courants induits dans la cage externe font un effet d'écran électromagnétique qui empêche la pénétration du champ statorique dans la masse du rotor. Les courants induits dans la cage interne sont faibles et tout se passe comme si le moteur démarrait avec sa seule cage externe, de forte résistance. Lorsque la vitesse augmente, l'intensité des courants induits diminue et l'effet d'écran s'atténue. L'essentiel du courant parcourt la cage interne peu résistive. Tout se passe comme si le moteur fonctionnait en régime permanent avec sa seule cage interne de faible résistance. On concilie ainsi un couple de démarrage important et un fonctionnement permanent à faible glissement. L'inconvénient est que le facteur de puissance est faible du fait de la consommation de puissance réactive due aux fuites magnétiques importantes de la cage interne.

### *Schéma monophasé équivalent*

La mise en équations est similaire à celle du moteur à simple cage. Affectons les indices  $s$  au stator,  $e$  à la cage extérieure et  $i$  à la cage intérieure. Les résistances par phase sont donc  $R_s$ ,  $R_e$  et  $R_i$ , les inductances propres cycliques  $L_s$ ,  $L_e$  et  $L_i$  et les inductances mutuelles cycliques  $M_{se}$ ,  $M_{ei}$  et  $M_{is}$ . Les courants sont  $i_s$ ,  $i_e$  et  $i_i$ , la tension au stator est  $v_s$ , les deux cages étant en court-circuit. En ramenant toutes les grandeurs électriques à la fréquence du stator, les équations pour les grandeurs complexes s'écrivent :

$$\underline{V}_s = R_s \underline{I}_s + jL_s \omega_s \underline{I}_s + jM_{se} \omega_s \underline{I}_e + jM_{is} \omega_s \underline{I}_i$$

$$0 = \frac{R_e}{g} \underline{I}_e + jL_e \omega_s \underline{I}_e + jM_{se} \omega_s \underline{I}_s + jM_{ei} \omega_s \underline{I}_i$$

$$0 = \frac{R_i}{g} \underline{I}_i + jL_i \omega_s \underline{I}_i + jM_{is} \omega_s \underline{I}_s + jM_{ei} \omega_s \underline{I}_e$$

Comme les deux cages forment des enroulements de même nombre de spires, nous avons  $M_{se} = M_{si}$  et  $L_e = M_{ei}$ . Nous pouvons définir des inductances de fuites totales de Boucherot :

- l'inductance  $L_{Bes}$  des fuites entre le stator et la cage extérieure, totalisées à la cage extérieure :

$$L_{Bes} = L_e - \frac{M_{se}^2}{L_s}$$

- l'inductance  $L_{Bie}$  des fuites entre la cage extérieure et la cage intérieure, totalisées à la cage extérieure :

$$L_{Bie} = L_i - \frac{M_{ei}^2}{L_e} = L_i - L_e$$

- l'inductance  $L_{Bis}$  des fuites entre la cage intérieure et le stator, totalisées à la cage intérieure :

$$L_{Bis} = L_i - \frac{M_{si}^2}{L_s} = L_i - \frac{M_{ei}^2}{L_s}$$

Remarquons que :

$$L_{Bis} = L_{Bes} + L_{Bie}$$

Ramenons toutes les grandeurs au stator, avec un rapport de transformation identique pour les deux cages,  $\frac{L_s}{M_{si}} = \frac{L_s}{M_{se}}$  :

$$\underline{I}_e'' = -\frac{M_{se}}{L_s} \underline{I}_e$$

$$\underline{I}_i'' = -\frac{M_{se}}{L_s} \underline{I}_i$$

$$R_e'' = \left(\frac{L_s}{M_{se}}\right)^2 R_e$$

$$R_i'' = \left(\frac{L_s}{M_{se}}\right)^2 R_i$$

$$L_{Bie}'' = \left(\frac{L_s}{M_{se}}\right)^2 L_{Bie}$$

$$L''_{Bis} = \left( \frac{L_s}{M_{se}} \right)^2 L_{Bis}$$

$$L''_{Bes} = \left( \frac{L_s}{M_{se}} \right)^2 L_{Bes}$$

L'introduction de ces différentes grandeurs dans le système initial donne, après simplification :

$$\underline{V}_s = R_s \underline{I}_s + jL_s \omega_s (\underline{I}_s - \underline{I}_e'' - \underline{I}_i'')$$

$$0 = -\frac{R_e''}{g} \underline{I}_e'' - jL''_{Bes} \omega_s (\underline{I}_e'' + \underline{I}_i'') + jL_s \omega_s (\underline{I}_s - \underline{I}_e'' - \underline{I}_i'')$$

$$0 = -\frac{R_i''}{g} \underline{I}_i'' - jL''_{Bes} \omega_s (\underline{I}_e'' + \underline{I}_i'') - jL''_{Bie} \omega_s \underline{I}_i'' + jL_s \omega_s (\underline{I}_s - \underline{I}_e'' - \underline{I}_i'')$$

Ces équations permettent de tracer un schéma monophasé équivalent (*figure 9.3*).

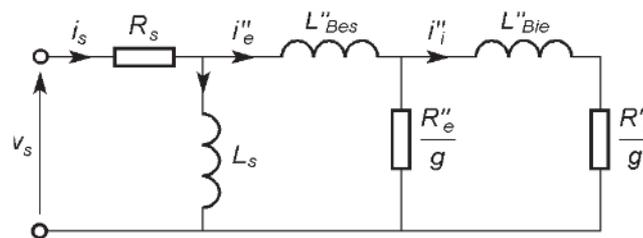


Figure 9.3 – Schéma monophasé équivalent d'un moteur à double cage avec les inductances de fuites totales.

Comme pour le moteur à simple cage, il est évidemment possible d'utiliser un schéma monophasé équivalent avec des inductances de fuites partielles (*figure 9.4*).

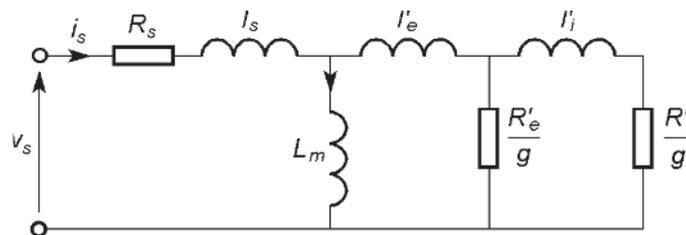


Figure 9.4 – Schéma monophasé équivalent d'un moteur à double cage avec les inductances de fuites partielles.

Enfin, il est possible de prendre en compte les pertes ferromagnétiques en ajoutant une résistance  $R_f'$  au schéma (*figure 9.5*).

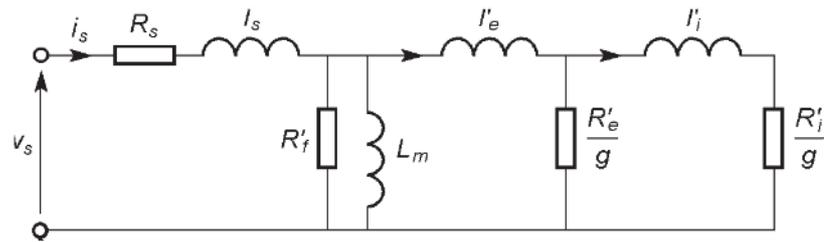


Figure 9.5 – Résistance modélisant les pertes ferromagnétiques.

#### □ Moteur à encoches profondes

Un résultat similaire au précédent peut être obtenu en utilisant une cage unique formée de barres hautes placées dans des encoches qui s'enfoncent profondément dans le rotor (*figure 9.6*). Comme nous l'avons vu, l'effet de peau limite la pénétration du champ magnétique dans le rotor, et ce, d'autant plus que la fréquence est élevée. À la mise sous tension, le rotor est immobile et les courants induits dans les barres rotoriques, à la fréquence de l'alimentation du stator se concentrent à la périphérie du rotor, ce qui correspond à une cage de forte résistance. Quand la vitesse augmente, la fréquence des courants induits diminue et la profondeur de pénétration du champ magnétique augmente. La cage présente ainsi une résistance plus faible en régime permanent.

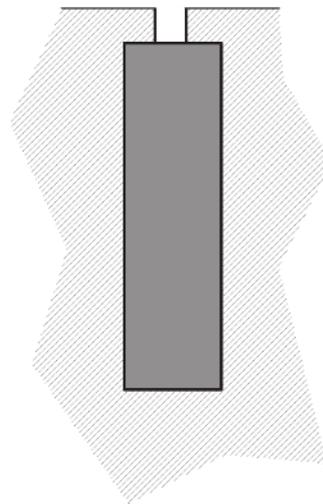


Figure 9.6 – Barre dans une encoche profonde.

D'autres profils d'encoches sont possibles (*figure 9.7*) : la forme trapézoïdale, en L ou en T renversé. Le but est d'accentuer le phénomène d'effet de peau en augmentant la largeur des parties plus profondes des barres.

Nous avons vu au paragraphe 2.2.4 que des coefficients correctifs devaient être appliqués à la résistance  $R_r$  et à l'inductance de fuites  $l_r$  du rotor. La profondeur de pénétration  $\delta$  est donnée par la formule :

$$\delta = \sqrt{\frac{2\rho}{\mu_0 g \omega_s}}$$

Comme  $\delta$  est inversement proportionnel à la racine carrée du glissement  $g$ ,  $\frac{h}{\delta}$  est proportionnel à  $\sqrt{g}$ . Lors du démarrage du moteur, la diminution progressive du glissement entraîne une baisse progressive de la résistance du rotor et une augmentation de son inductance de fuites.

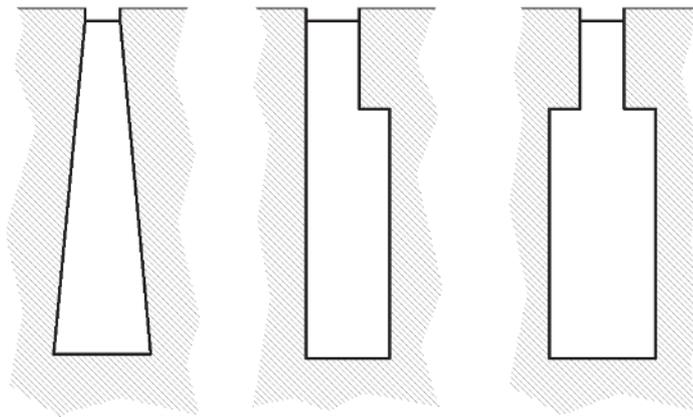


Figure 9.7 – Divers profils d'encoches.

### ■ Dispositifs de démarrage

Lorsque les caractéristiques de démarrage ne sont pas satisfaisantes, en particulier à cause d'un appel de courant trop important pour le réseau, il faut ajouter au moteur un dispositif de démarrage.

### □ Démarrage avec insertion de résistances en série

Des résistances, métalliques ou électrolytiques, sont placées en série avec chaque phase du stator au moment du démarrage, puis éliminées quand le moteur a atteint sa vitesse de régime (*figure 9.8*). Dans un premier temps, on ferme l'interrupteur  $K_1$  et on laisse ouvert  $K_2$ . Le moteur démarre et la vitesse augmente. Lorsque celle-ci est suffisante, on ferme  $K_2$  qui court-circuite les résistances, ce qui conduit alors à un branchement direct de la machine sur le réseau.

Des variations brutales du couple et du courant appelé se produisent à la fermeture de  $K_2$  (*figure 9.9*). Pour le tracé des courbes, on a supposé que le point de fonctionnement se déplace sur la caractéristique statique, ce qui n'est pas le cas en régime transitoire. Toutefois, les variations de vitesse étant assez lentes, il est légitime de considérer le régime transitoire comme une succession de régimes permanents, au moins en première approximation ou pour un raisonnement purement qualitatif.

Pour améliorer les performances du démarrage, il est parfois nécessaire d'éliminer progressivement les résistances. Par exemple, chaque résistance peut être scindée en deux parties (*figure 9.10*). Dans un premier temps, on ferme l'interrupteur  $K_1$  et on

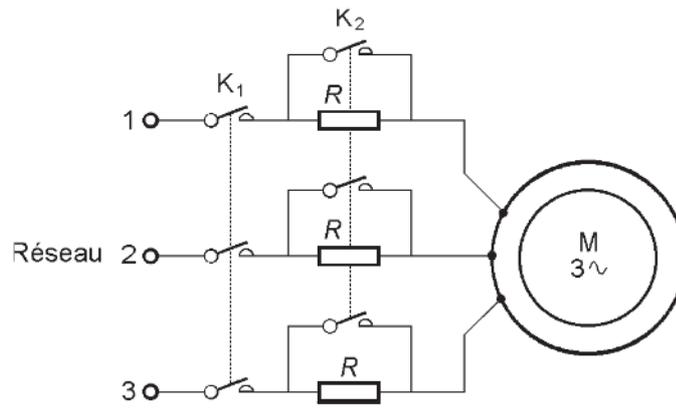


Figure 9.8 – Insertion d’une résistance en série dans chaque phase.

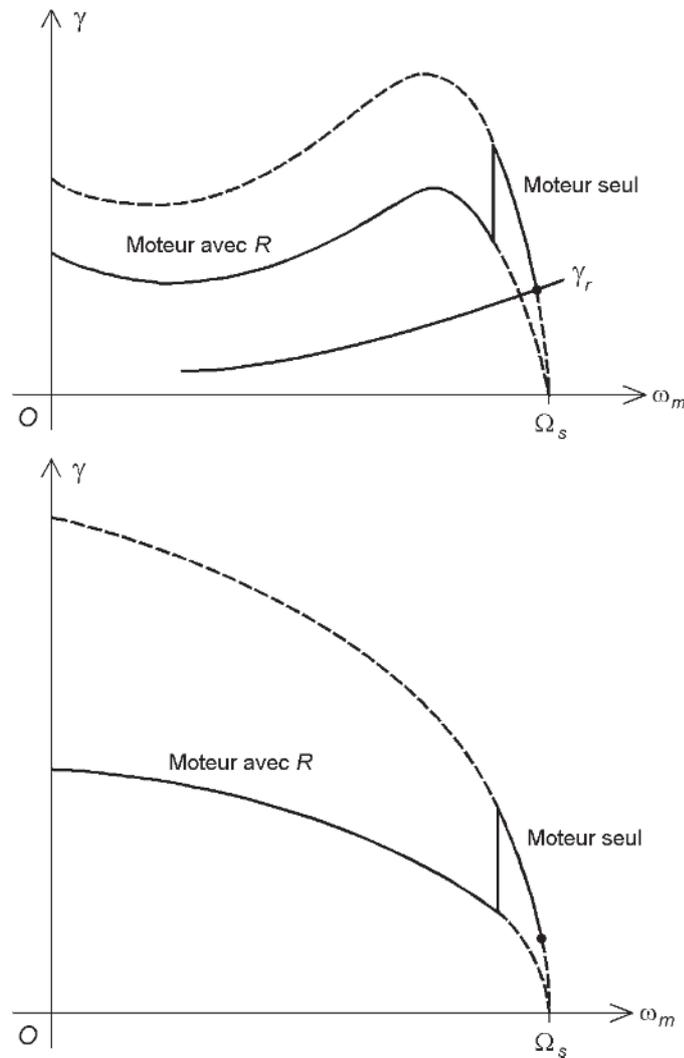


Figure 9.9 – Variations brusques du couple et du courant à la fermeture de l’interrupteur.

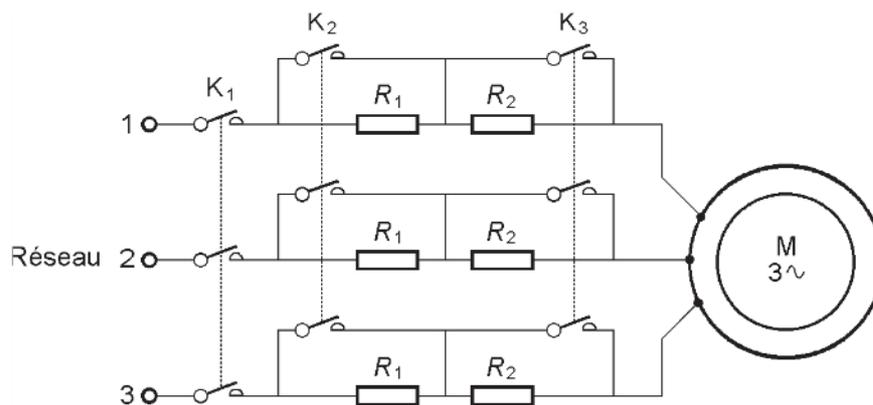


Figure 9.10 – Élimination des résistances en deux temps.

laisse ouvert  $K_2$  et  $K_3$ . Le moteur démarre. Pour une certaine vitesse, on ferme  $K_3$  qui court-circuite une partie des résistances, puis, pour une vitesse plus grande, on ferme  $K_2$ , ce qui conduit alors à un branchement direct de la machine sur le réseau. Des variations brusques du couple et du courant appelé apparaissent à la fermeture des deux interrupteurs de court-circuit (figure 9.11). Il est possible d'augmenter le nombre de résistances et d'interrupteurs, mais cela se fait au détriment de la fiabilité et du coût du dispositif.

L'emploi de résistances électrolytiques permet d'obtenir une variation continue, ce qui évite les augmentations brutales du couple et du courant. Un seul interrupteur est utilisé pour court-circuiter les résistances électrolytiques à la fin du processus alors que leur valeur est presque nulle.

Le démarrage par résistances est la solution la plus simple pour réduire la surintensité au démarrage lorsqu'elle est excessive. Cependant, les performances sont très médiocres : le couple de démarrage est réduit et une énergie importante est dissipée par effet Joule dans les résistances. Ce mode de démarrage ne peut être utilisé que pour des moteurs à basse tension de faible puissance.

#### □ Démarrage avec insertion de bobines en série

Le procédé est similaire au précédent, mais les résistances sont remplacées par des bobines (figure 9.12). Cette solution est meilleure sur le plan énergétique, mais le couple de démarrage reste toujours très limité. Ce mode de démarrage présente de l'intérêt pour les moteurs à haute tension de moyenne ou grande puissance.

#### □ Démarrage étoile-triangle

Ce procédé s'applique aux moteurs construits pour fonctionner normalement avec des enroulements couplés en triangle et dont les six bornes des phases statoriques sont sorties. Au démarrage, le stator est momentanément branché en étoile, puis lorsque le rotor a pratiquement atteint sa vitesse de régime, le couplage passe en triangle.

La connexion en étoile divise par  $\sqrt{3}$  la tension appliquée et donc le courant dans chaque phase par rapport au montage normal en triangle. De plus, pour ce dernier

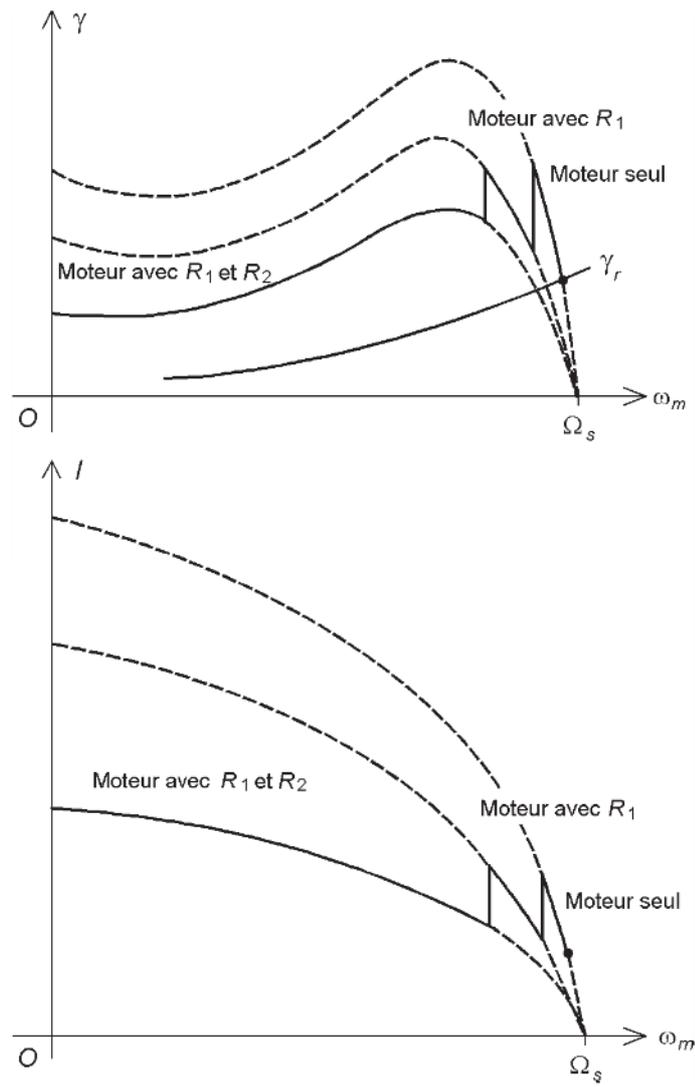


Figure 9.11 – Variations brusques du couple et du courant à la fermeture des interrupteurs.

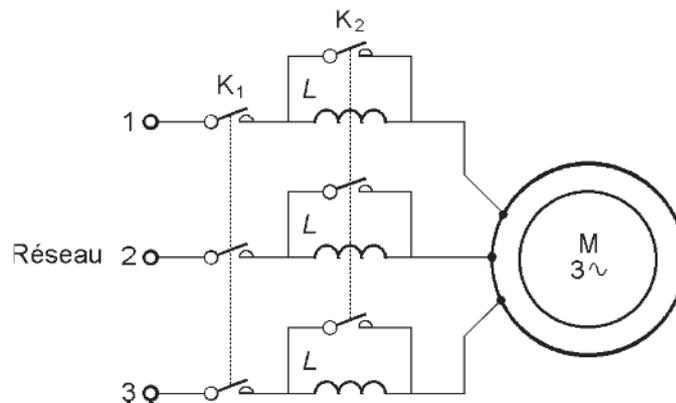
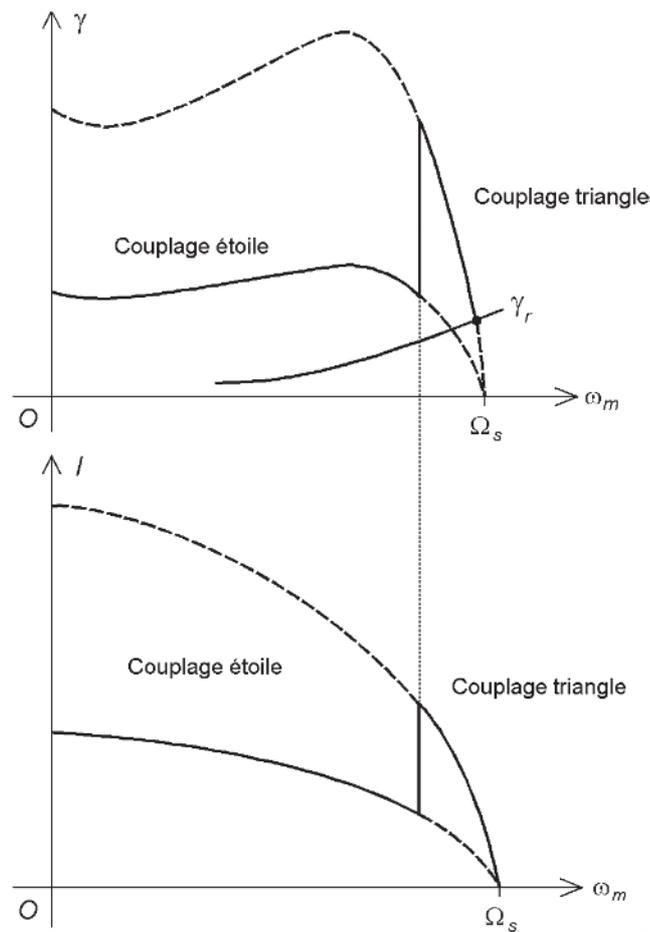


Figure 9.12 – Insertion d'une bobine en série dans chaque phase.



**Figure 9.13** – Courbes du moment du couple électromagnétique et de l'intensité des courants en ligne en fonction de la fréquence de rotation lors d'un démarrage étoile-triangle.

couplage, le courant en ligne est égal au courant dans une phase multiplié par  $\sqrt{3}$ . L'intensité en ligne au démarrage est donc divisée par 3. Le couple étant proportionnel au carré de la tension, il est également réduit dans un rapport 3. La commutation au couplage en triangle provoque un à-coup de couple et de courant (*figure 9.13*). Le tracé des courbes a été fait en considérant que le régime transitoire est assez lent pour pouvoir être considéré comme une succession de régimes permanents. En réalité, un régime transitoire rapide intervient au moment du changement de couplage car le commutateur coupe le courant pendant un bref instant. Il en résulte une démagnétisation du circuit magnétique suivie d'une magnétisation provoquant une pointe de courant.

Pour préciser le comportement du moteur, il faut faire appel à une simulation numérique permettant de tracer les variations du courant, du moment du couple électromagnétique et de la vitesse de rotation (*figure 9.14*).

C'est un mode de démarrage classique pour les moteurs basse tension de faible ou moyenne puissance. Il ne convient pas aux moteurs haute tension à cause de l'à-coup de courant lors du passage de l'étoile au triangle. Du fait de l'importante réduction

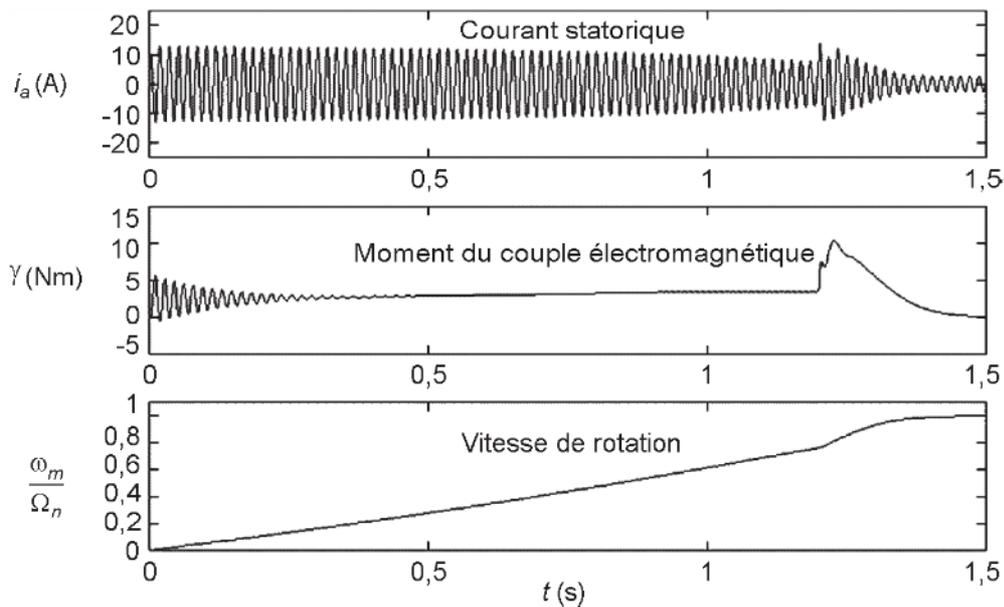


Figure 9.14 – Courbes de l'intensité du courant dans la phase a, du moment du couple électromagnétique et de la vitesse de rotation en fonction du temps lors d'un démarrage étoile-triangle.

du couple, cette solution n'est utilisable que pour les moteurs qui démarrent à vide ou avec une faible charge. Le changement de couplage peut être manuel ou automatique.

#### □ Démarrage par autotransformateur

Avec le démarrage par autotransformateur, il s'agit toujours de réduire la tension au moment du démarrage, mais sans interrompre l'alimentation du moteur (*figure 9.15*). La tension appliquée au moteur est multipliée par le rapport de transformation  $m$  (inférieur à 1). Il en est de même pour le courant appelé par le moteur. Par ailleurs, le courant demandé par le primaire de l'autotransformateur au réseau est approximativement égal au courant du secondaire multiplié par  $m$ . Le courant de démarrage demandé au réseau est donc multiplié par  $m^2$ . Le couple étant proportionnel au carré de la tension, il est également multiplié par  $m^2$ .

L'à-coup mécanique est beaucoup plus réduit qu'avec un démarrage étoile-triangle. Un autre avantage est que le couplage du moteur n'est pas nécessairement en triangle, ce qui est intéressant pour les moteurs à haute tension. Toutefois, le coût et l'encombrement de l'autotransformateur font que cette solution a toujours été marginale.

#### □ Démarrage par gradateur

Un gradateur à thyristors (*figure 9.16*) ou à triacs (*figure 9.17*) si la taille du moteur le permet, permet de faire varier progressivement la tension en réglant l'angle de retard à l'amorçage. Le résultat est similaire à celui obtenu avec un autotransformateur avec un encombrement moindre et un coût plus avantageux. Néanmoins, la tension obtenue n'est pas sinusoïdale et la présence des harmoniques est néfaste pour le comportement du moteur.

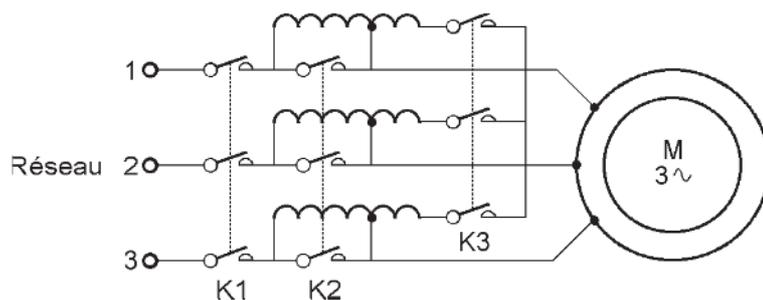


Figure 9.15 – Démarrage par autotransformateur.

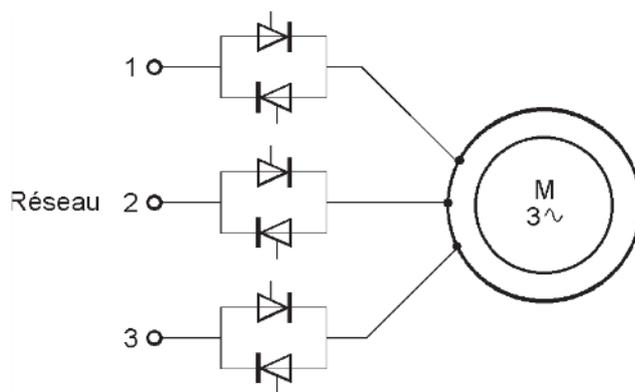


Figure 9.16 – Démarrage par gradateur à thyristors.

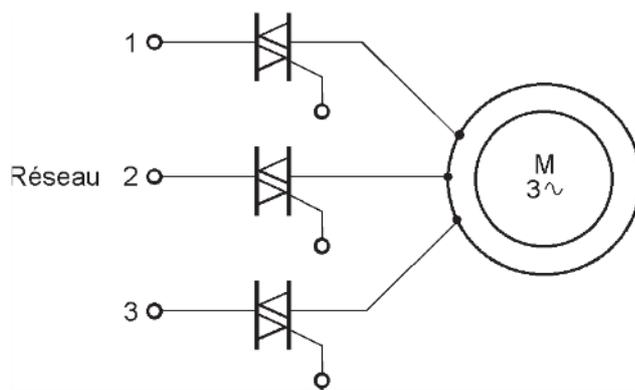


Figure 9.17 – Démarrage par gradateur à triacs.

### 9.1.2 Freinage

Pour arrêter un moteur, il suffit de couper son alimentation. Le processus est plus ou moins long selon l'inertie et les couples résistants présents. Dans certaines applications, il est nécessaire de freiner le moteur, soit dans le but de l'arrêter, soit pour simplement limiter une vitesse qui devient trop élevée. Plusieurs solutions peuvent être utilisées pour obtenir un freinage électrique.

### ■ Freinage hypersynchrone

Dans le domaine du levage ou des ascenseurs, la charge en descente entraîne le moteur et tend à lui imposer une vitesse supérieure à la vitesse de synchronisme. Dans ce cas, le moteur asynchrone freine spontanément.

En effet, si un moteur asynchrone est entraîné au-delà de la vitesse de synchronisme, le glissement et le moment du couple électromagnétique deviennent négatifs : la machine fonctionne en générateur asynchrone. C'est alors la charge qui produit un couple moteur et la machine asynchrone qui oppose un couple résistant. Le point de fonctionnement en moteur, tel que M, passe à un point de fonctionnement en générateur, tel que G (figure 9.18).

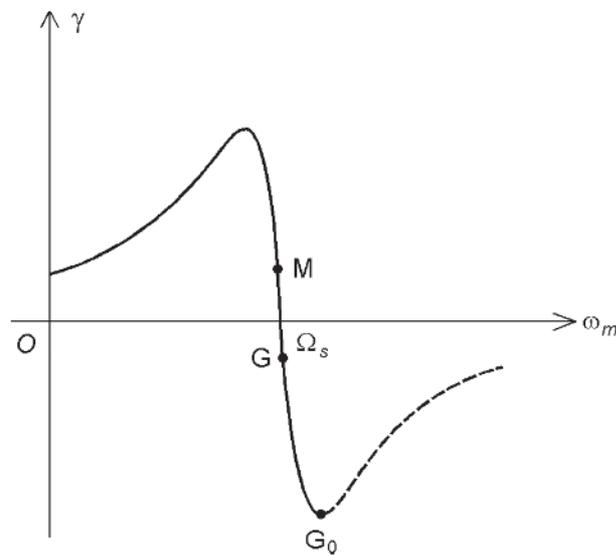


Figure 9.18 – Point de fonctionnement lors d'un freinage hypersynchrone.

Ce freinage se produisant pour une vitesse supérieure à la vitesse de synchronisme, il est qualifié d'hypersynchrone. L'énergie est renvoyée vers le réseau : il s'agit d'un fonctionnement en récupération. Ce mode de freinage est assez spécifique : il permet d'éviter un emballement du moteur, mais en aucun cas de le ralentir en dessous du synchronisme. Il y a évidemment une limite pour le couple entraînant de la charge : il ne faut pas dépasser le point  $G_0$ , sinon le couple résistant du moteur diminue, ce qui produit un emballement de la machine.

### ■ Freinage à contre-courant

Le freinage à contre-courant consiste à inverser le sens de rotation du champ tournant en permutant deux phases du stator. Il en résulte un couple résistant. La vitesse

de synchronisme passe de  $\Omega_s$  à  $-\Omega_s$  et le glissement de  $g = \frac{\Omega_s - \omega_m}{\Omega_s}$  à

$g' = \frac{-\Omega_s - \omega_m}{-\Omega_s} = 2 - g$ . Comme le glissement normal  $g$  est faible, le glissement

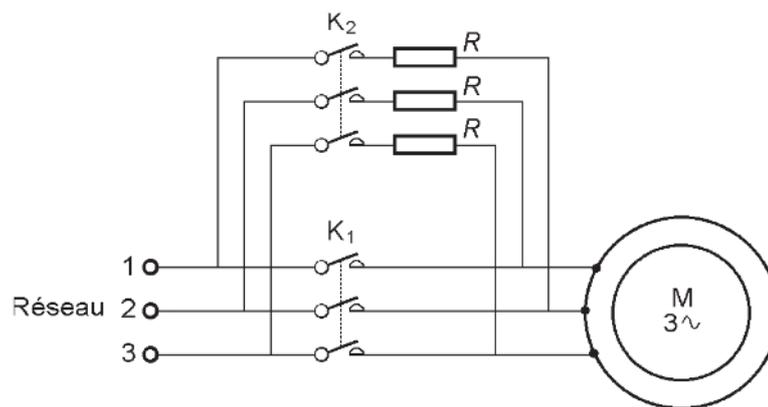


Figure 9.19 – Insertion de résistances lors d'un freinage à contre-courant.

$g'$  au moment de l'inversion est de l'ordre de 2. Il en résulte un courant plus élevé et un couple plus faible que lors d'un démarrage. Avant d'utiliser ce mode de freinage, il faut donc vérifier que les caractéristiques du moteur l'autorisent. Ce n'est jamais le cas pour une machine à cage ordinaire, mais cela peut être possible pour des moteurs à cage résistante, à double cage ou à encoches profondes. Si le courant est excessif, il peut être limité par des résistances additionnelles, mais le couple de freinage est alors encore plus modeste (figure 9.19).

Ce freinage s'effectue sans récupération : l'énergie est dissipée par effet Joule, d'autant plus que le réseau continue à fournir de l'énergie au moteur. Le moteur peut freiner jusqu'à l'arrêt, mais il faut alors couper l'alimentation sous peine de le voir repartir un sens inverse. Un capteur centrifuge permet de commander cette commutation.

Ce mode de freinage n'est utilisé que pour des moteurs de petite ou moyenne puissance.

#### ■ Freinage par injection de courant continu

L'alimentation triphasée du stator est débranchée et une source de tension continue est connectée entre deux bornes (figure 9.20). Il en résulte un champ magnétique fixe qui produit un couple résistant freinant le moteur. L'énergie cinétique de rotation est transformée en effet Joule dans le rotor. La machine se comporte comme un alternateur inversé (induit au rotor et inducteur au stator), dont l'induit est court-circuité.

### 9.1.3 Inversion du sens de rotation

Pour inverser le sens de rotation d'un moteur asynchrone, il suffit d'inverser le sens du champ tournant en permutant les connexions de deux phases de son alimentation.

### 9.1.4 Réglage de la vitesse

#### ■ Changement du nombre de pôles

C'est une solution simple pour obtenir un moteur à deux vitesses. L'exemple le plus connu est le couplage Dahlander (figure 9.21). Deux bobines successives peuvent

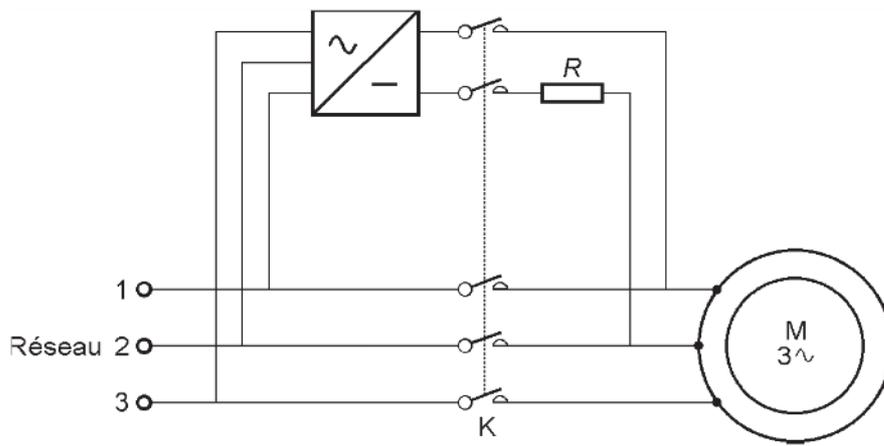


Figure 9.20 – Injection de courant continu.

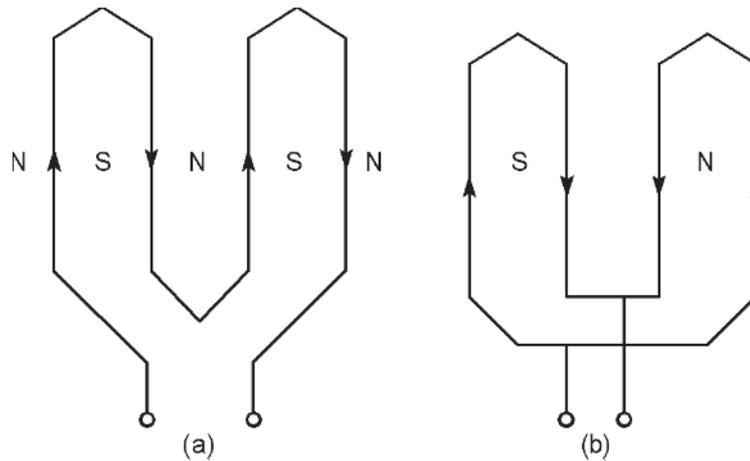


Figure 9.21 – Principe du couplage Dahlander.

créer quatre pôles si elles sont montées en série et deux pôles si elles sont montées en parallèle. Comme la vitesse de rotation du moteur est inversement proportionnelle au nombre de paires de pôles, sa valeur varie dans un rapport 2 lors du changement de connexion. Le moteur possède une petite vitesse  $\omega_p$  et une grande vitesse  $\omega_G$  :

$$\omega_G = 2\omega_p$$

Le moment du couple est proportionnel au nombre de paires de pôles et à la valeur efficace de la tension aux bornes d'une bobine. Si les moments des couples sont  $\gamma_G$  et  $\gamma_p$ , les nombres de paires de pôles  $p_G$  et  $p_p$  et les valeurs efficaces des tensions aux bornes d'une bobine  $V_G$  et  $V_p$  respectivement pour la grande vitesse et pour la petite vitesse, nous avons :

$$\frac{\gamma_G}{\gamma_p} = \frac{p_G V_G}{p_p V_p} = \frac{V_G}{2V_p}$$

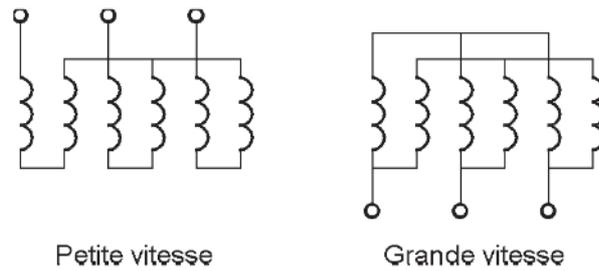


Figure 9.22 – Premier exemple de couplage Dahlander.

Plusieurs configurations sont possibles pour les commutations de l'enroulement. Elles permettent de faire fonctionner le moteur dans de bonnes conditions pour les deux vitesses suivant le comportement de la charge. Dans un premier exemple, l'enroulement est couplé en étoile avec des bobines en série pour la petite vitesse et en étoile avec des bobines en parallèle pour la grande vitesse (*figure 9.22*).

Si  $U$  est la tension composée du réseau, la tension aux bornes d'une bobine est  $V_G = \frac{U}{\sqrt{3}}$  pour la grande vitesse et  $V_P = \frac{1}{2} \frac{U}{\sqrt{3}}$  pour la petite vitesse. Le rapport des moments des couples est donc :

$$\frac{\gamma_G}{\gamma_P} = \frac{\frac{U}{\sqrt{3}}}{2 \times \frac{1}{2} \frac{U}{\sqrt{3}}} = 1$$

Cette solution convient pour les charges présentant un couple résistant constant (treuil, engins de levage).

Dans un second exemple, l'enroulement est couplé en triangle avec des bobines en série pour la petite vitesse et en étoile avec des bobines en parallèle pour la grande vitesse (*figure 9.23*).

Si  $U$  est la tension composée du réseau, la tension aux bornes d'une bobine est  $V_G = \frac{U}{\sqrt{3}}$  pour la grande vitesse et  $V_P = \frac{1}{2} U$  pour la petite vitesse.

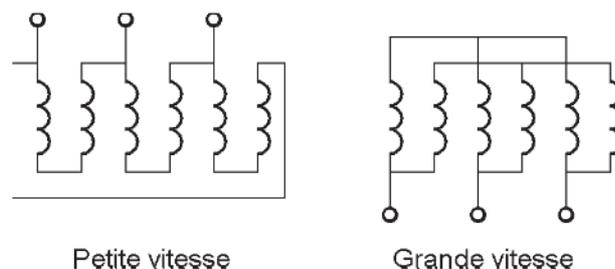


Figure 9.23 – Deuxième exemple de couplage Dahlander.

Le rapport des moments du couple est donc :

$$\frac{\gamma_G}{\gamma_P} = \frac{\frac{U}{\sqrt{3}}}{2 \times \frac{1}{2} U} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,577$$

Le rapport des puissances est :

$$\frac{P_G}{P_P} = \frac{\gamma_G \omega_G}{\gamma_P \omega_P} = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1,15$$

Cette solution convient pour une charge mécanique fonctionnant à puissance constante.

### ■ Modification de la tension d'alimentation

#### □ Principe

En changeant la valeur efficace des tensions appliquées au moteur, on modifie la caractéristique mécanique. La valeur du glissement correspondant au maximum du moment du couple n'est pas affectée (*figure 9.24*).

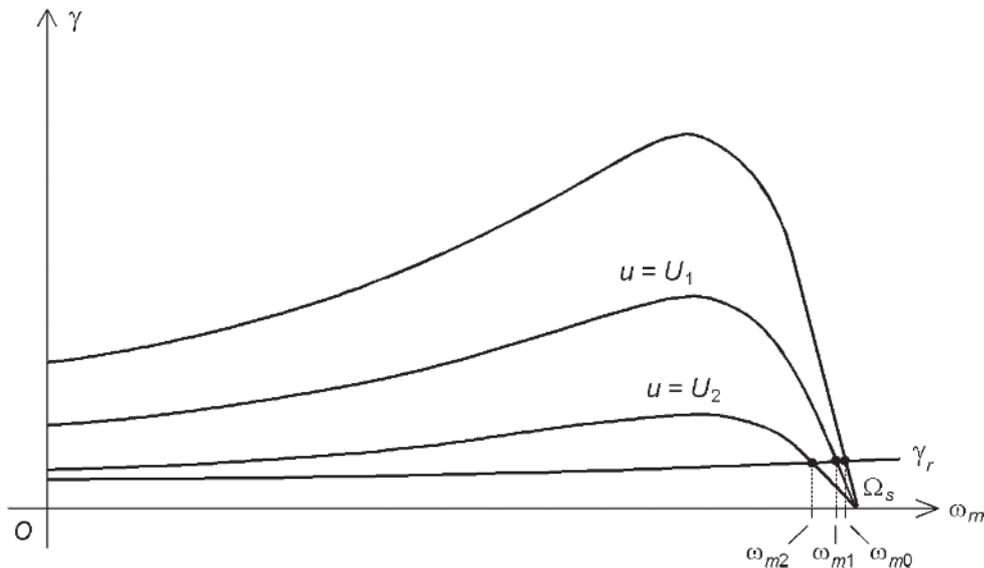


Figure 9.24 – Modification de la caractéristique mécanique.

La plage de réglage obtenue est assez limitée. Son étendue dépend du type de variation du couple résistant. Cette méthode est peu performante et elle ne convient que pour des charges présentant un couple résistant croissant avec la vitesse (pompe, compresseur, ventilateur). Pour une charge donnée, l'étendue des variations dépend des caractéristiques du moteur (*figure 9.25*).

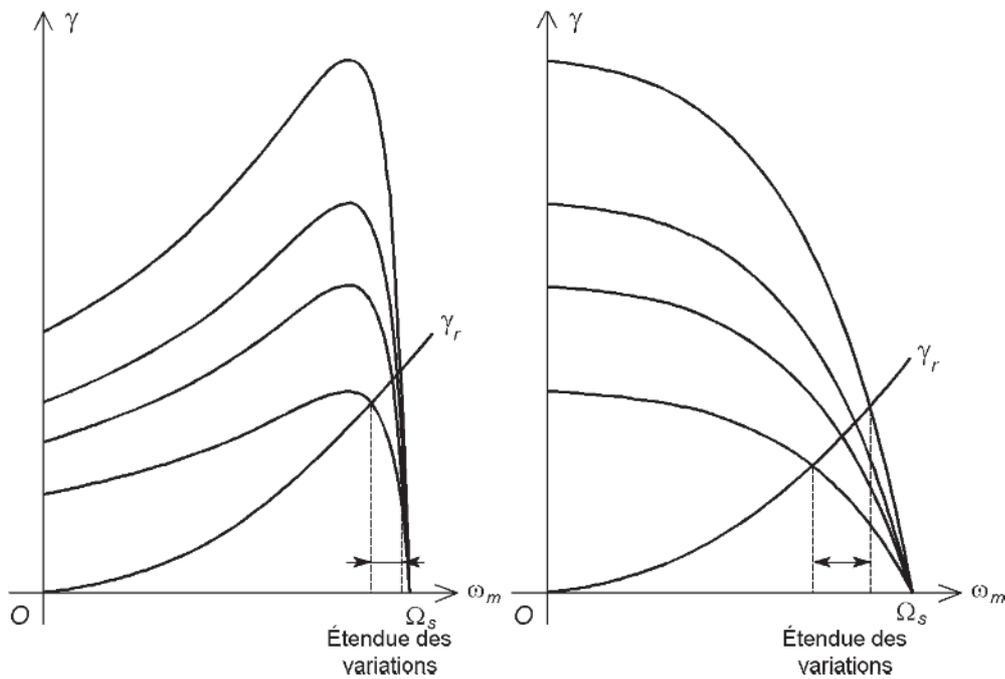


Figure 9.25 – Comparaison de l'étendue des variations de vitesse pour deux moteurs différents.

#### □ Réglage par autotransformateur

Le réglage du rapport de transformation permet d'obtenir une variation de la tension. Les tensions obtenues sont pratiquement sinusoïdales, mais le coût et l'encombrement de l'autotransformateur rendent cette solution peu intéressante.

#### □ Réglage par gradateur

Un gradateur à thyristors ou à triacs permet de faire varier progressivement la tension en réglant l'angle de retard à l'amorçage. Les montages sont les mêmes que ceux que nous avons vus pour le démarrage de la machine et on retrouve le même avantage et le même inconvénient par rapport à un autotransformateur : l'encombrement est moindre et le coût plus avantageux, mais la tension obtenue est riche en harmoniques.

## 9.2 Moteur asynchrone à rotor bobiné

### 9.2.1 Démarrage

Le démarrage s'effectue en insérant des résistances en série avec les phases du bobinage du rotor : c'est le démarrage rotorique. Ainsi, le couple de démarrage augmente et l'appel du courant diminue. Les résistances sont ensuite réduites progressivement. Le réglage peut se faire par un rhéostat à plots ou par un dispositif électronique formé d'un redresseur non commandé suivi d'un hacheur et d'une résistance que nous retrouverons plus loin pour la variation de vitesse.

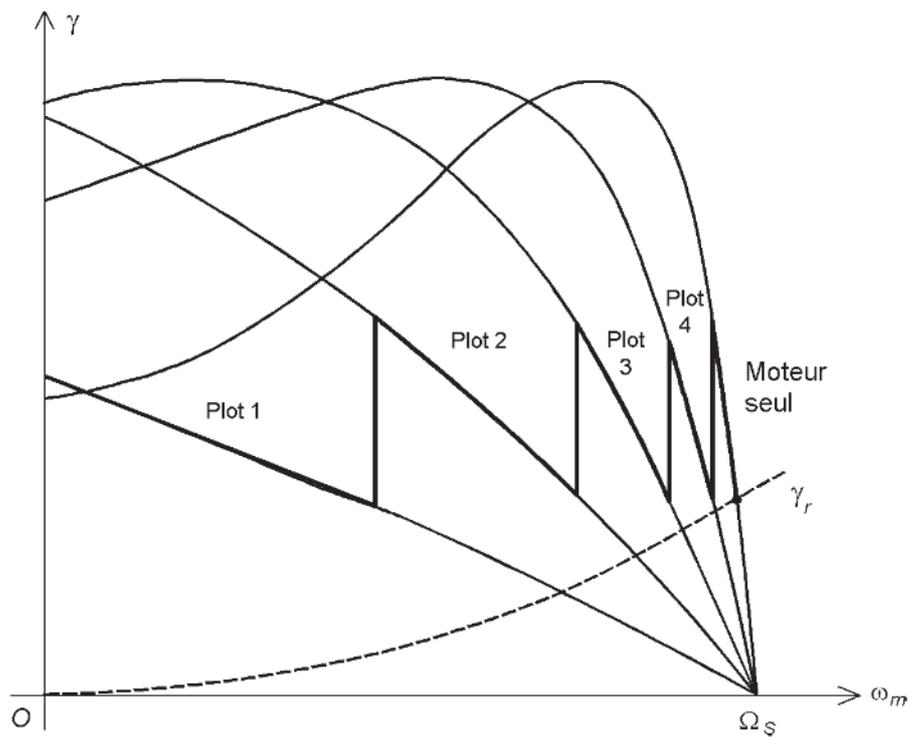


Figure 9.26 – Évolution du point de fonctionnement pour un démarrage rotorique.

Avec un rhéostat, le point de fonctionnement va se déplacer sur les caractéristiques mécaniques obtenues pour les différents plots avant de se fixer sur la caractéristique du moteur (*figure 9.26*). Les résistances sont choisies de façon à obtenir un démarrage assez rapide sans dépasser les valeurs autorisées pour l'intensité.

La possibilité d'optimiser le démarrage est un des avantages des moteurs asynchrones à rotor bobiné. Toutefois, le coût plus élevé fait que cette solution est réservée à des cas présentant des contraintes particulières : démarrage en douceur d'un ascenseur, mise en vitesse de machines à moment d'inertie élevé, exigence d'un couple de démarrage important (broyeurs, malaxeurs). Les progrès réalisés dans la commande électronique des moteurs à cage ont évidemment réduit considérablement l'intérêt de cette solution.

### 9.2.2 Freinage

Les méthodes de freinage décrites pour le moteur à cage sont toujours valables, mais l'accès au rotor permet d'améliorer leurs performances.

#### ■ Freinage hypersynchrone

La vitesse de descente des engins de levage peut être réglée en agissant sur des résistances insérées en série avec les phases du rotor.

### ■ Freinage à contre-courant

Pour limiter le courant, une grande résistance est insérée en série avec les phases du rotor lors de l'inversion du branchement du stator. Sa valeur est ensuite réduite au fur et à mesure que la vitesse diminue. Les caractéristiques sont optimisées : le couple de freinage est plus élevé tout en limitant le courant appelé à une valeur raisonnable.

### 9.2.3 Réglage de vitesse

La vitesse de rotation  $\omega_m$  d'un moteur asynchrone à rotor bobiné ayant  $p$  paires de pôles, alimenté à la fréquence fixe  $f_s$  peut être réglée en agissant sur le glissement  $g$  :

$$\omega_m = (1 - g) \frac{2\pi f_s}{p}$$

Pour modifier le glissement, il faut soutirer de l'énergie au rotor, soit en la dissipant par effet Joule, soit en la récupérant.

### ■ Variation de la résistance rotorique par rhéostat de glissement

#### □ Principe

Le stator est directement relié au réseau, mais un rhéostat triphasé est placé sur les bornes du rotor : c'est le rhéostat de glissement. Une résistance est donc en série avec chaque phase rotorique (*figure 9.27*).

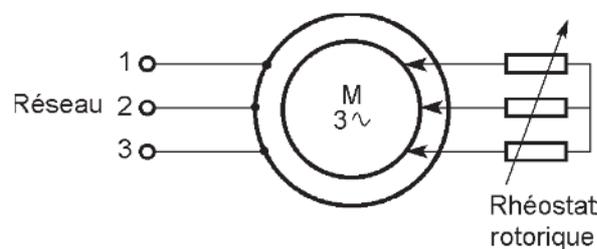


Figure 9.27 – Variation de la résistance rotorique.

Quand on augmente la résistance du circuit rotorique, la caractéristique mécanique du moteur se déplace vers la gauche (*figure 9.28*).

La vitesse est  $\omega_{m0}$  en l'absence de rhéostat. Elle prend une valeur  $\omega_{m1}$  plus faible si le rhéostat ajoute une résistance  $R_1$  en série avec la résistance  $R_r$  de chaque phase du rotor. Elle passe ensuite à la valeur encore plus faible  $\omega_{m2}$  si le rhéostat ajoute une résistance  $R_2$  supérieure à  $R_1$ . La plage de variation possible est d'autant plus large que la charge du moteur est importante.

#### □ Avantages et inconvénients

Le rhéostat de glissement est un procédé simple pour obtenir une variation de vitesse, mais il s'agit uniquement d'un réglage manuel, sans possibilité de commande électronique. L'étendue de la variation est très limitée pour un moteur faiblement chargé.

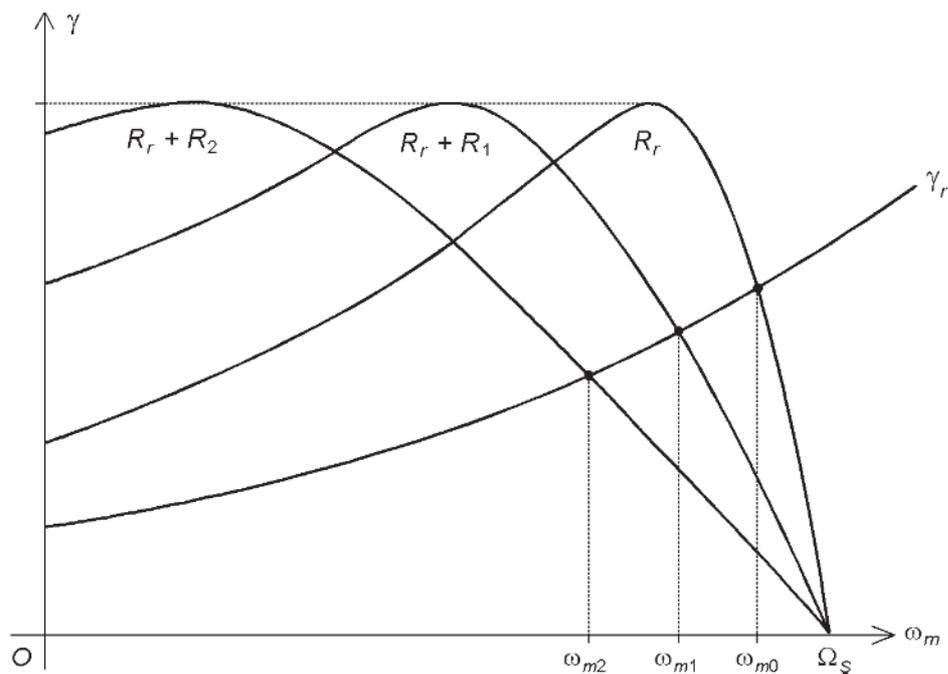


Figure 9.28 – Influence de la résistance du circuit rotorique sur la caractéristique mécanique du moteur.

L'énergie nécessaire au glissement est perdue par effet Joule dans le rhéostat. Le rendement de l'opération est donc déplorable. Nous avons montré que ce rendement est strictement inférieur à  $1 - g$  : il se dégrade donc d'autant plus que le glissement est important. Heureusement, l'échauffement a lieu à l'extérieur de la machine. Il faut néanmoins dimensionner le rhéostat en conséquence, ce dernier est donc encombrant et coûteux. Enfin, le réglage dépend de la caractéristique mécanique de la charge.

### ■ Variation de la résistance rotorique par hacheur

#### □ Principe

Le rhéostat rotorique peut être remplacé par un redresseur non commandé suivi d'un hacheur et d'une résistance (*figure 9.29*).

Le circuit branché sur le rotor se comporte comme un rhéostat de glissement dont la valeur serait commandée par le rapport cyclique  $\alpha$  du hacheur.

#### □ Avantages et inconvénients

Par rapport au procédé précédent, le réglage de la vitesse par un hacheur a gagné en souplesse et permet une commande électronique. Il garde néanmoins le gros inconvénient d'un rendement déplorable. Le réglage dépend toujours de la caractéristique mécanique de la charge.

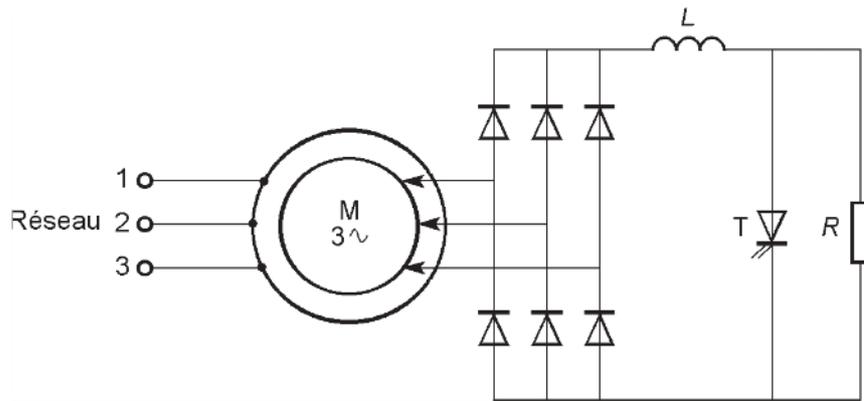


Figure 9.29 – Hacheur rotorique.

### ■ Cascade hyposynchrone

#### □ Principe

La cascade hyposynchrone permet de faire varier la vitesse d'un moteur asynchrone en augmentant le glissement, mais en récupérant la puissance. Comme les tensions rotoriques n'ont ni la même fréquence, ni la même valeur efficace que celles du réseau, il faut faire appel à un convertisseur électronique de fréquence et de tension. La puissance est prélevée au rotor par un redresseur non commandé et renvoyé au réseau par un onduleur suivi d'un transformateur (*figure 9.30*).

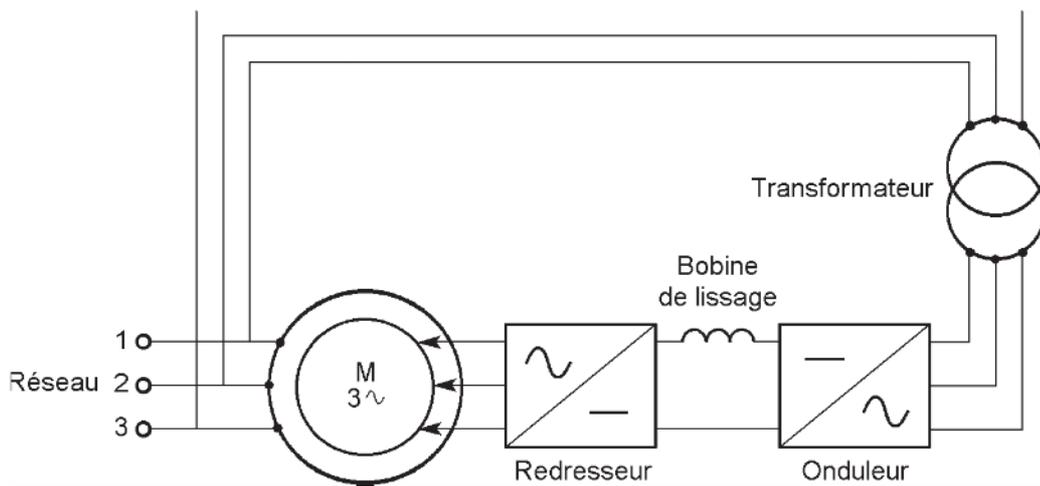


Figure 9.30 – Cascade hyposynchrone.

Pour comprendre le fonctionnement du dispositif, faisons un raisonnement simplifié en négligeant les pertes. La puissance  $P_s$  reçue par le stator du moteur traverse l'entrefer. Une partie  $(1 - g)P_s$  forme la puissance mécanique tandis que le reste,  $gP_s$  est transmis au circuit rotorique. L'ensemble du redresseur et de l'onduleur renvoie cette

puissance vers le réseau qui ne fournit en définitive que la puissance  $P_s - gP_s = (1 - g)P_s$ , c'est-à-dire la puissance mécanique.

En négligeant l'effet de la résistance et de l'inductance, la tension simple du rotor a une valeur efficace  $V_r \approx gmV_s$ ,  $m$  étant le rapport de transformation du moteur. Le redresseur à diodes du type PD3 délivre une tension dont la valeur moyenne est :

$$\langle u_d \rangle = \frac{3\sqrt{6}}{\pi} V_r \approx \frac{3\sqrt{6}}{\pi} gmV_s$$

L'onduleur à thyristors fournit des tensions alternatives de valeur efficace  $V_s$ . Si  $k$  est le rapport de transformation du transformateur et  $\psi$  l'angle de retard à l'amorçage, la tension en entrée de l'onduleur a une valeur moyenne :

$$\langle u_i \rangle = \frac{3\sqrt{6}}{\pi} kV_s \cos \psi$$

Comme la valeur moyenne de la tension aux bornes de la bobine de lissage est nulle, nous avons :

$$\langle u_d \rangle = -\langle u_i \rangle$$

ce qui conduit à :

$$g = -\frac{k}{m} \cos \psi$$

Le glissement et donc la vitesse de rotation sont donc commandés par l'angle de retard à l'amorçage de l'onduleur :

$$\omega_m = \left(1 + \frac{k}{m} \cos \psi\right) \frac{2\pi f_s}{p}$$

Compte tenu des chutes de tension dans le moteur et le transformateur, les caractéristiques mécaniques ont une certaine courbure (*figure 9.31*).

#### □ Avantages et inconvénients

La cascade hyposynchrone donne une variation continue de la vitesse dans une plage assez large avec un rendement satisfaisant. Elle est utilisée pour des moteurs de forte puissance, en général dans la gamme des mégawatts. La puissance de dimensionnement du convertisseur électronique est d'autant moins élevée que la plage de variation de la vitesse est faible.

Le démarrage est parfois possible directement, mais le plus souvent un rhéostat de démarrage est conservé pour la montée en vitesse avant le bouclage de la cascade afin d'éviter d'avoir à surdimensionner le convertisseur pour les faibles glissements. Le réglage de la vitesse n'est pas proportionnel à  $\cos \psi$  et il est difficile de réguler la vitesse. Enfin, la cascade hyposynchrone a évidemment l'inconvénient d'employer un moteur à rotor bobine, qui exige une maintenance plus coûteuse à cause de ses

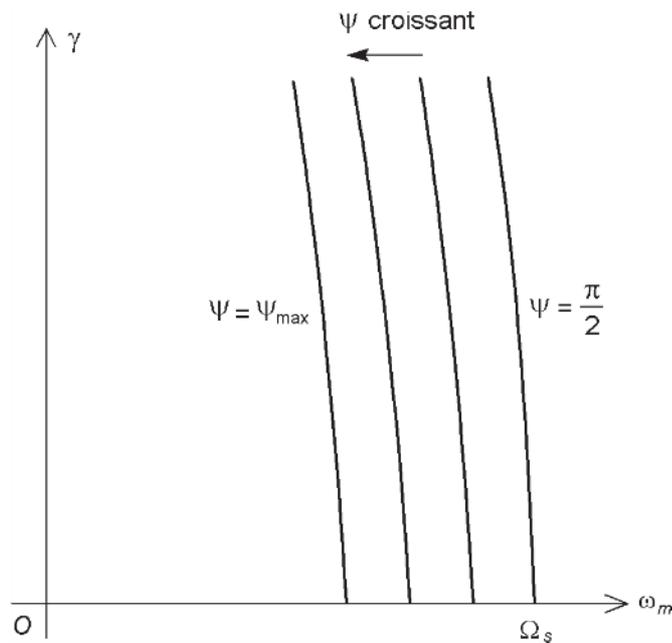


Figure 9.31 – Caractéristiques mécaniques pour plusieurs valeurs de l'angle de retard à l'amorçage.

contacts tournants. Elle subit donc la concurrence sévère du moteur à cage alimenté par un onduleur.

## 9.3 Moteur asynchrone à cage alimenté à fréquence variable

Le réglage de la vitesse d'un moteur asynchrone à cage n'est réalisé dans de bonnes conditions qu'en faisant varier la fréquence des tensions appliquées. Cette solution exige des convertisseurs électroniques et une commande élaborés, ce qui a limité son emploi pendant longtemps. Les progrès récents dans les domaines de l'électronique de puissance et surtout de l'électronique de commande font que ce procédé est devenu une excellente solution pour la plupart des entraînements à vitesse variable.

### 9.3.1 Convertisseur de puissance

#### ■ Cycloconvertisseur

#### □ Principe

Le cycloconvertisseur est un convertisseur alternatif-alternatif permettant d'obtenir des tensions de fréquence réglable. Comme il n'est utilisé qu'en forte puissance, il est constitué de thyristors (figure 9.32).

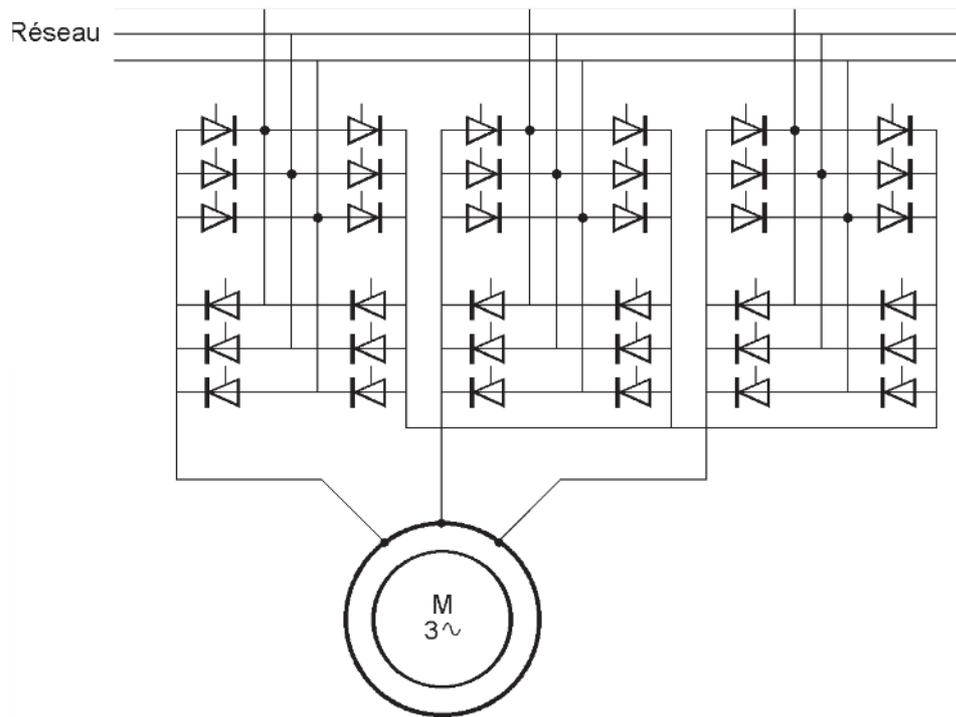


Figure 9.32 – Moteur asynchrone alimenté par un cycloconvertisseur.

#### □ Avantages et inconvénients

Le cycloconvertisseur présente quelques avantages. Il permet l'inversion du sens de rotation du moteur. Le montage est naturellement réversible : il est possible de renvoyer de l'énergie au réseau. Toutes les commutations sont réalisées par l'alimentation et il n'y a donc pas à prévoir de dispositif particulier pour bloquer les thyristors.

Le cycloconvertisseur a également des inconvénients majeurs qui limitent son utilisation. Il comprend un grand nombre de thyristors (36 dans le montage classique) et sa commande est complexe. La fréquence de la tension de sortie est faible devant celle du réseau : on ne dépasse pas un tiers, soit environ 15 Hz pour le réseau à fréquence industrielle 50 Hz. Le procédé est donc réservé à des moteurs de forte puissance et à vitesse lente.

#### ■ Onduleur de tension

L'onduleur de tension constitue la solution la plus répandue pour l'alimentation des moteurs asynchrones.

#### □ Principe

L'onduleur est un convertisseur continu-alternatif permettant d'obtenir des tensions de fréquence réglable. Il est constitué de transistors, particulièrement d'IGBT ou de thyristors GTO pour les fortes puissances (*figure 9.33*). L'onduleur fonctionne en modulation de largeur d'impulsions (MLI) : la tension continue est découpée à une fréquence assez élevée pour former des impulsions rectangulaires d'amplitude fixe et

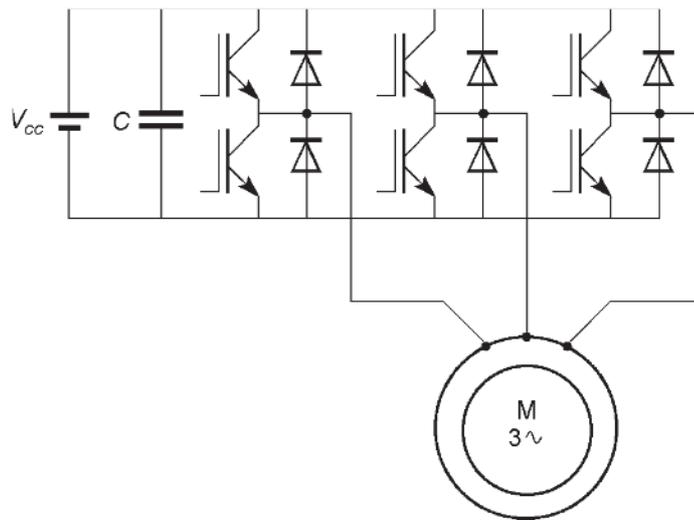


Figure 9.33 – Moteur asynchrone alimenté par un onduleur de tension à IGBT.

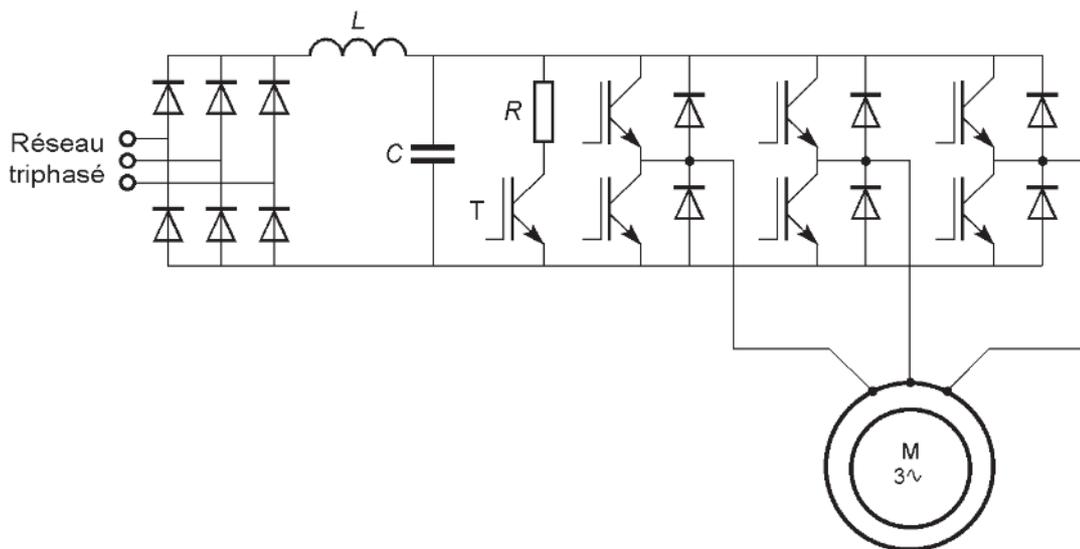


Figure 9.34 – Réalisation de l'alimentation à partir du réseau triphasé.

de largeur variable. Le fondamental de cette tension a une amplitude et une fréquence réglable. Les caractéristiques de la tension obtenue sont indépendantes de la charge : il s'agit d'une alimentation en tension.

L'alimentation continue de l'onduleur est souvent obtenue à partir du réseau, en général triphasé, plus rarement monophasé. Un redresseur en pont suivi d'un filtre LC convient pour cet usage. Cependant, la source de tension continue réalisée ainsi n'est pas réversible et elle ne peut donc pas récupérer l'énergie en cas de freinage. Une résistance de dissipation associée à un interrupteur électronique doit alors être ajoutée (figure 9.34). Lors d'un freinage, le condensateur commence à recevoir l'énergie du moteur. Un circuit approprié détecte la tension à ses bornes, et dès que celle-ci dépasse un seuil prédéfini, il commande la mise en conduction de l'interrupteur T.

L'énergie renvoyée par le moteur est ensuite dissipée par effet Joule dans la résistance  $R$ .

#### □ Avantages et inconvénients

Ce type de convertisseur est devenu aujourd'hui une solution très classique pour les variateurs de vitesse de faible ou de moyenne puissance, de moins d'un kilowatt à plus d'un mégawatt. Il a donc l'avantage d'être un produit bien standardisé et d'un coût très raisonnable.

L'inconvénient de ce convertisseur est de ne pas permettre la récupération d'énergie lors du freinage (à cause du redresseur à diodes).

#### ■ Onduleur de courant

##### □ Principe

L'onduleur de courant à thyristors fonctionne en commutation forcée grâce aux circuits d'extinction constitués de diodes et de condensateurs.

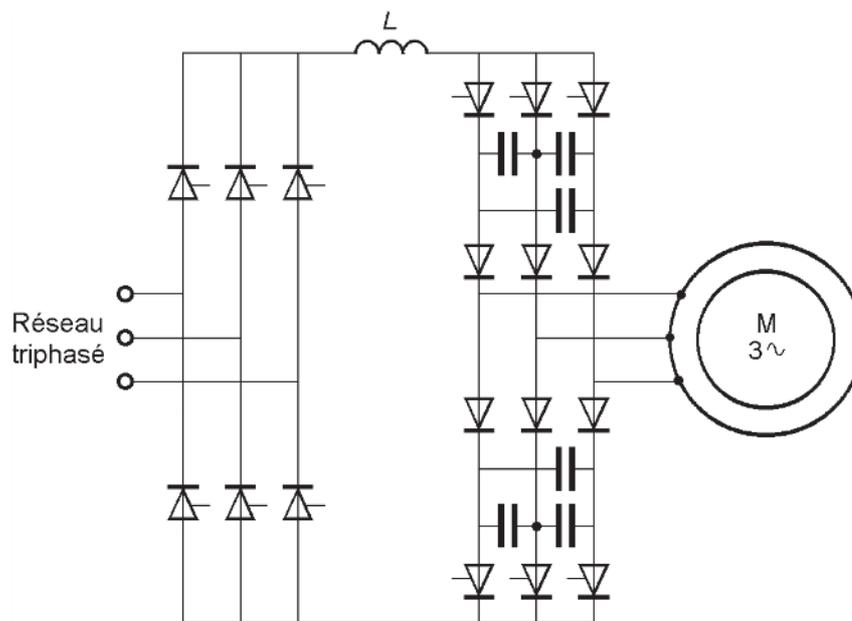


Figure 9.35 – Moteur asynchrone alimenté par un onduleur de courant.

#### □ Avantages et inconvénients

Ce type de convertisseur est réversible : il permet donc le freinage avec récupération. L'inconvénient est que le courant est rectangulaire, ce qui donne des pertes supplémentaires dans le moteur qui doit donc être déclassé.

L'énergie renvoyée par le moteur est ensuite dissipée par effet Joule dans la résistance  $R$ .

#### □ Avantages et inconvénients

Ce type de convertisseur est devenu aujourd'hui une solution très classique pour les variateurs de vitesse de faible ou de moyenne puissance, de moins d'un kilowatt à plus d'un mégawatt. Il a donc l'avantage d'être un produit bien standardisé et d'un coût très raisonnable.

L'inconvénient de ce convertisseur est de ne pas permettre la récupération d'énergie lors du freinage (à cause du redresseur à diodes).

#### ■ Onduleur de courant

##### □ Principe

L'onduleur de courant à thyristors fonctionne en commutation forcée grâce aux circuits d'extinction constitués de diodes et de condensateurs.

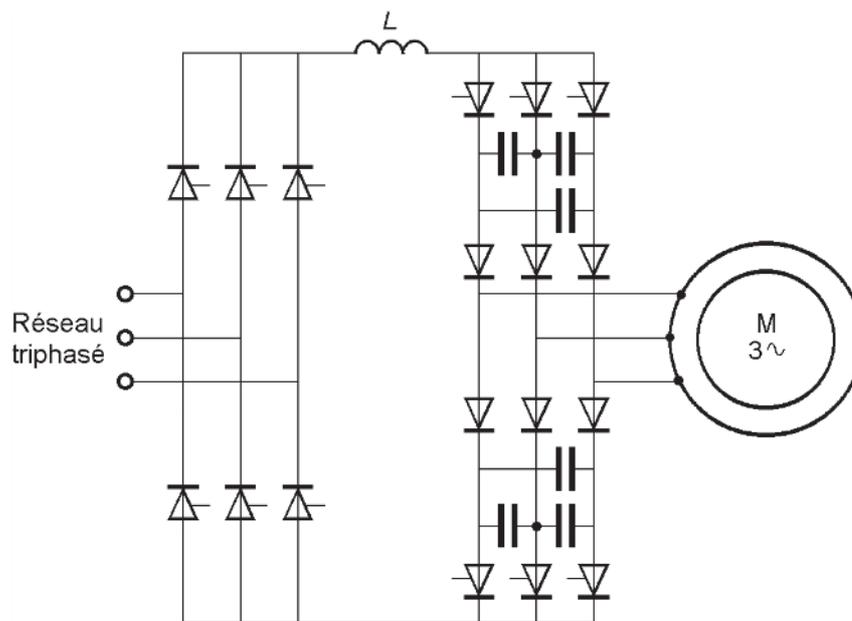


Figure 9.35 – Moteur asynchrone alimenté par un onduleur de courant.

#### □ Avantages et inconvénients

Ce type de convertisseur est réversible : il permet donc le freinage avec récupération. L'inconvénient est que le courant est rectangulaire, ce qui donne des pertes supplémentaires dans le moteur qui doit donc être déclassé.

### 9.3.2 Commande

#### ■ Commande scalaire

#### □ Principe

Considérons un moteur asynchrone alimenté par un onduleur de tension qui permet de commander la valeur efficace et la fréquence des tensions statoriques. Reprenons l'expression du moment du couple électromagnétique obtenue au paragraphe 8.4.5 :

$$\gamma = 3p \omega_s \frac{\frac{R_r''}{g}}{\frac{R_r''^2}{g^2} + L_{Br}''^2 \omega_s^2} \Psi_s^2$$

Multiplions numérateur et dénominateur par  $g^2$  et tenons compte du fait que la pulsation rotorique  $\omega_r$ , la pulsation statorique  $\omega_s$  et le glissement  $g$  sont reliés par la formule  $\omega_r = g\omega_s$  :

$$\gamma = 3p \omega_r \frac{R_r''}{R_r''^2 + L_{Br}''^2 \omega_s^2} \Psi_s^2$$

Le moment du couple électromagnétique est imposé par la valeur efficace  $\Psi_s$  du flux statorique et la pulsation rotorique  $\omega_r$ .

Les performances optimales du moteur sont obtenues si le flux est constant dans toute la gamme de vitesse. Il faut imposer au flux sa valeur nominale car si celle-ci est dépassée, la saturation du circuit magnétique devient inacceptable tandis que si le flux diminue, et avec lui le courant magnétisant, c'est le courant rotorique qui devient excessif. Nous fixerons donc le flux statorique  $\Psi_s$  à sa valeur nominale  $\Psi_{sn}$ .

Pour cela, il faut imposer le rapport  $\frac{V_s'}{\omega_s}$  de la valeur efficace  $V_s'$  de la tension statorique interne à la pulsation statorique  $\omega_s$  puisque :

$$V_s' = \omega_s \Psi_s$$

Le moment  $\gamma$  du couple électromagnétique ne dépend alors que de la pulsation rotorique  $\omega_r$ . La courbe de  $\gamma$  en fonction de  $\omega_r$  présente un maximum pour une pulsation  $\omega_{rM}$  (figure 9.36).

Pour déterminer la pulsation  $\omega_{rM}$ , divisons le numérateur et le dénominateur de l'expression de  $\gamma$  par  $\omega_r$  :

$$\gamma = 3p \frac{R_r''}{\frac{R_r''^2}{\omega_r} + L_{Br}''^2 \omega_r} \Psi_s^2$$

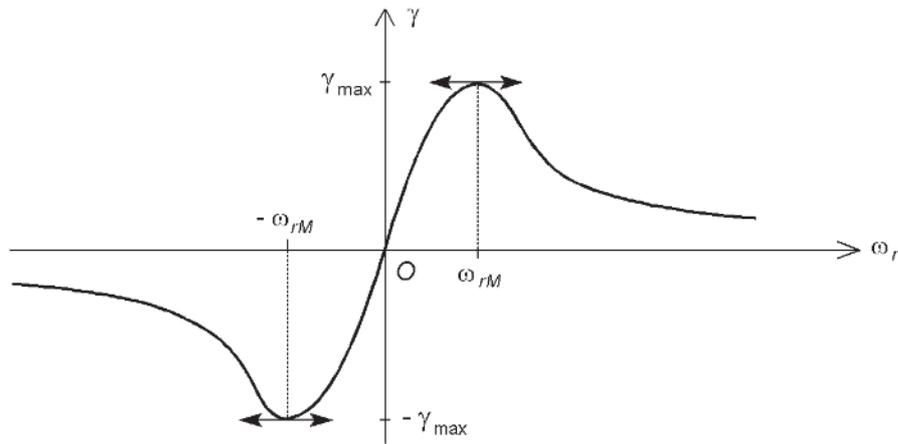


Figure 9.36 – Courbe du moment du couple électromagnétique en fonction de la pulsation rotorique.

Le numérateur est constant tandis que le dénominateur est la somme de deux termes dont le produit est constant : il est extrémal lorsque ces deux termes sont égaux :

$$\frac{R_r''^2}{\omega_r} = L_{Br}''^2 \omega_r$$

La pulsation  $\omega_{rM}$  correspondant au maximum est donc :

$$\omega_{rM} = \frac{R_r''}{L_{Br}''}$$

La courbe de  $\gamma$  en fonction de  $\omega_r$  permet de construire le réseau des caractéristiques mécaniques paramétré par la fréquence statorique  $f_s$  (figure 9.37) puisque la vitesse de rotation du moteur s'écrit :

$$\omega_m = p(\omega_s - \omega_r)$$

Les différentes courbes se déduisent l'une de l'autre par translation le long de l'axe des vitesses.

Il peut paraître plus logique d'imposer le flux d'entrefer, c'est-à-dire le flux commun au stator plutôt que le flux statorique. Il faut alors considérer le modèle avec inductances de fuites partielles (figure 9.38).

Reprenons l'expression du moment du couple électromagnétique établie au paragraphe 8.4.1 :

$$\gamma = \frac{3 \frac{R_r'}{g} I_r'^2}{\Omega_s}$$

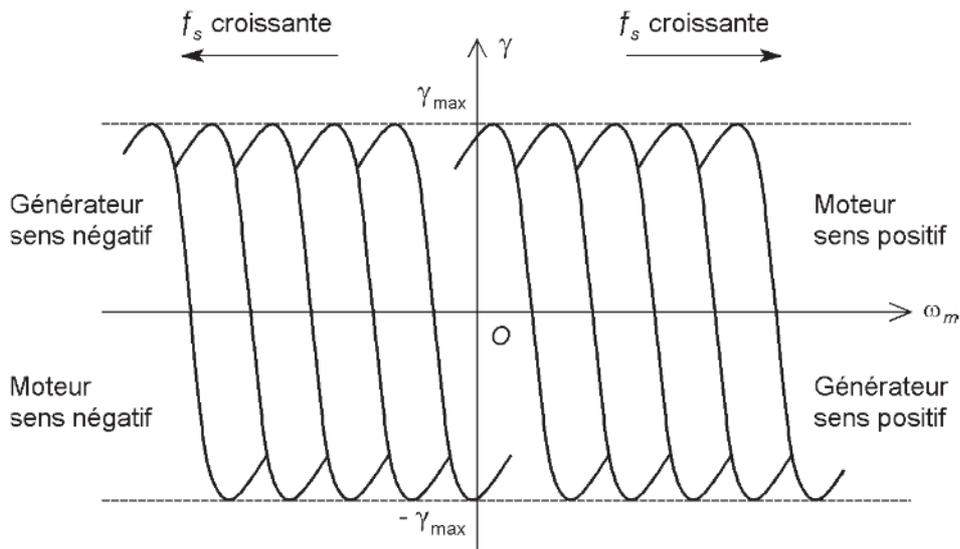


Figure 9.37 – Réseau des caractéristiques mécaniques paramétré par la fréquence statorique.

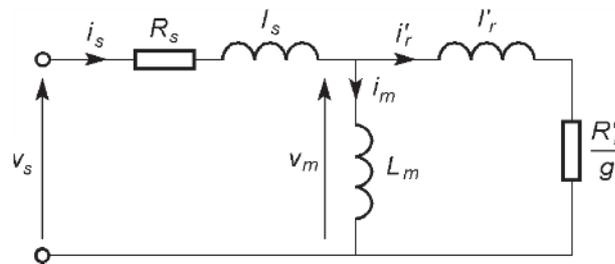


Figure 9.38 – Modèle avec inductances de fuites partielles.

Exprimons le courant rotorique ramené au stator  $\underline{I}'_r$  à partir de la tension  $\underline{V}_m$  aux bornes de l'inductance magnétisante  $L_m$  :

$$\underline{I}'_r = \frac{\underline{V}_m}{\frac{R'_r}{g} + j l'_r \omega_s}$$

Après avoir exprimé le module de cette grandeur complexe, nous remplaçons dans la formule du moment du couple :

$$\gamma = \frac{3 \frac{R'_r}{g}}{\Omega_s} \frac{V_m^2}{\left(\frac{R'_r}{g}\right)^2 + (l'_r \omega_s)^2}$$

Multiplions numérateur et dénominateur par  $g^2$ , remplaçons  $\Omega_s$  par  $\frac{\omega_s}{p}$  et faisons apparaître la pulsation rotorique  $\omega_r = g\omega_s$  :

$$\gamma = 3p\omega_r \frac{R_r'}{R_r'^2 + l_r'^2 \omega_r^2} \left( \frac{V_m}{\omega_s} \right)^2$$

Nous obtenons à un résultat analogue à celui qui avait été établi pour le modèle avec inductances de fuites totales. Si la valeur efficace  $\frac{V_m}{\omega_s}$  du flux d'entrefer est imposée, le moment du couple électromagnétique ne dépend que de la pulsation rotorique  $\omega_r$ .

#### □ Loi $\frac{U}{f}$ constante

Pour travailler à flux statorique de valeur efficace constante, il faut fixer le rapport  $\frac{V_s'}{\omega_s}$  et pour travailler à flux d'entrefer de valeur efficace constante, il faut fixer le rapport  $\frac{V_m}{\omega_s}$ , ce qui n'est pas facile à réaliser. Cependant, si la vitesse de rotation n'est pas trop faible, les tensions  $V_s'$  et  $V_m$  sont assez proches de la tension  $V_s$  appliquée au stator. Il est alors suffisant de maintenir constant le rapport  $\frac{V_s}{\omega_s}$  ou, ce qui revient au même le rapport  $\frac{V_s}{f_s}$ . On parle alors de commande à  $\frac{V}{f}$  constant ou comme on préfère qualifier l'alimentation triphasée par la valeur efficace  $U$  de sa tension composée de commande à  $\frac{U}{f}$  constant.

#### □ Loi $\frac{U}{f}$ constante corrigée

Imposer le rapport  $\frac{V_s}{f_s}$  n'est pas tout à fait équivalent à fixer le rapport  $\frac{V_s'}{\omega_s}$  ou le rapport  $\frac{V_m}{\omega_s}$ . L'écart apparaît pour les fréquences faibles (*figure 9.39*).

Aux basses fréquences, la chute de tension dans la résistance statorique n'est pas négligeable. Le flux n'est donc plus maintenu constant avec un rapport  $\frac{V_s}{f_s}$  fixe. Pour remédier à ce problème, il faut augmenter la valeur efficace de la tension aux basses fréquences pour compenser la chute de tension : c'est la loi  $\frac{U}{f}$  constante corrigée.

#### □ Extension de la plage de vitesse

Dans un fonctionnement à flux constant, il est impossible d'augmenter la vitesse lorsque la valeur efficace  $V_s$  de la tension statorique a atteint sa valeur nominale. Pour

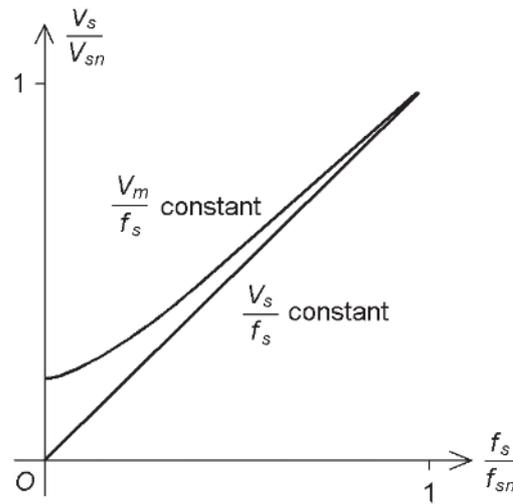


Figure 9.39 – Écart entre rapport  $\frac{V_s}{f_s}$  et rapport  $\frac{V_m}{f_s}$ .

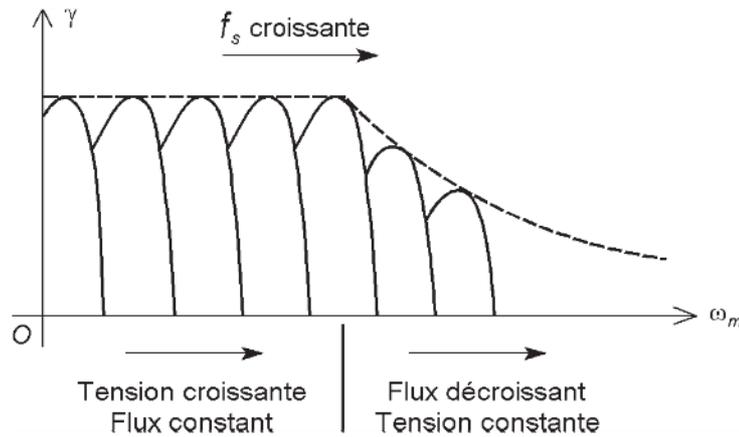


Figure 9.40 – Fonctionnement en survitesse.

dépasser cette limite, il faut diminuer le flux, mais le moment maximal du couple décroît : c'est le fonctionnement en survitesse (figure 9.40).

#### □ Avantages et inconvénients

La commande scalaire est simple à réaliser. Elle donne de bons résultats en régime permanent, mais manque de performances lors des régimes transitoires de variation de vitesse. Avec la loi  $\frac{U}{f}$  constante, le couple est réduit aux basses vitesses. La compensation effectuée avec la loi  $\frac{U}{f}$  constante corrigée permet de maintenir un couple élevé à basse vitesse, mais il présente l'inconvénient d'augmenter le temps de réponse

du système. La commande scalaire est utilisée dans de nombreux variateurs. C'est la solution la moins coûteuse si de bonnes performances dynamiques ne sont pas exigées.

### ■ Commande vectorielle

La commande vectorielle a été introduite par Blaschke<sup>1</sup> et d'autres auteurs dans les années 1970, mais ce n'est que dans les dernières années du XX<sup>e</sup> siècle que les progrès de l'électronique de commande ont permis son développement industriel.

### □ Principe

Pour obtenir de bonnes performances en régime transitoire, il faut commander le couple instantané. Plusieurs stratégies sont possibles. Nous nous contenterons de décrire le principe le plus courant : la commande à flux rotorique orienté.

La commande vectorielle ou commande à flux orienté utilise le modèle de Park du moteur. Le but est d'assurer le découplage du couple et du flux. Une des composantes de Park du courant règle le flux et l'autre le moment du couple. Plaçons-nous dans le repère dq lié au champ tournant et considérons la formule qui donne le moment du couple électromagnétique, démontrée au paragraphe 7.4.4 :

$$\gamma = p \frac{M}{L_r} (\Psi_{rd} i_{sq} - \Psi_{rq} i_{sd})$$

En annulant la composante du flux rotorique sur l'axe en quadrature ( $\Psi_{rq} = 0$ ) la formule devient :

$$\gamma = p \frac{M}{L_r} \Psi_{rd} i_{sq}$$

La position du vecteur d'espace du flux rotorique est imposée sur l'axe d du repère dq. C'est pour cela que cette méthode est appelée commande à flux rotorique orienté. Considérons une des relations démontrée au paragraphe 7.4.3 :

$$0 = R_r i_{rd} + \frac{d\Psi_{rd}}{dt} - \Psi_{rq} g \omega_s$$

Comme  $\Psi_{rq} = 0$ , la formule se simplifie :

$$0 = R_r i_{rd} + \frac{d\Psi_{rd}}{dt}$$

Nous en déduisons :

$$i_{rd} = -\frac{1}{R_r} \frac{d\Psi_{rd}}{dt}$$

1. Blaschke F., *The principle of field orientation as applied in the new Transvector closed-loop control system for rotating field machines*, Siemens Rev., 217 p., 1972.

Utilisons ensuite l'expression établie au paragraphe 7.4.2 :

$$\Psi_{rd} = L_r i_{rd} + M i_{sd}$$

En remplaçant  $i_{rd}$  par son expression précédente, nous arrivons à :

$$\Psi_{rd} = -\frac{L_r}{R_r} \frac{d\Psi_{rd}}{dt} + M i_{sd}$$

soit, en introduisant la constante de temps rotorique  $\tau_r = \frac{L_r}{R_r}$  :

$$\tau_r \frac{d\Psi_{rd}}{dt} + \Psi_{rd} = M i_{sd}$$

Cette équation différentielle du premier ordre montre que la composante directe  $i_{sd}$  du courant statorique impose le flux  $\Psi_r = \Psi_{rd}$ .

En résumé, la composante  $i_{sd}$  fixe le flux et la composante  $i_{sq}$  fixe le couple. L'application de cette méthode impose de pouvoir calculer des transformées de Park et des transformées de Park inverses en temps réel et d'effectuer l'estimation des paramètres nécessaires à partir des informations issues des capteurs du système. Si un simple microcontrôleur peut convenir dans certains cas, c'est l'avènement du processeur numérique de signal (*DSP, Digital signal processor*) qui a permis le développement de cette technique.

#### □ Avantages et inconvénients

La commande vectorielle permet d'obtenir de bonnes performances à la fois en régime permanent et en régime transitoire, et ce dans toute la gamme de vitesse. Le système est évidemment assez complexe, mais la diffusion de plus en plus importante de ce mode de commande permet une certaine standardisation des équipements qui en facilite l'usage.

Copyright © 2005 Dunod. Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite à l'exception des cas prévus aux termes de l'article L.122-5, 2° et 3° a) du Code de la Propriété Intellectuelle.

# 10 • PRINCIPE ET MODÉLISATION DU MOTEUR SYNCHRONE

---

La machine synchrone est surtout connue pour ses applications en générateur (l'alternateur) où elle est presque sans concurrent, mais elle sert également en moteur dans un certain nombre de domaines. Depuis longtemps, les moteurs synchrones sont utilisés dans des applications de forte puissance à vitesse fixe, mais les progrès dans le domaine de l'alimentation et de la commande leur permettent aujourd'hui d'être présents en vitesse variable. L'arrivée d'aimants performants à un coût raisonnable a également permis de développer les moteurs synchrones de petite et moyenne puissance, qui, associés à l'électronique, ont des qualités analogues à celles des moteurs à courant continu, sans en avoir les inconvénients.

## 10.1 Généralités

### 10.1.1 Définition

Un moteur synchrone est un moteur à courant alternatif pour lequel la vitesse de rotation de l'arbre est égale à la vitesse de rotation du champ tournant.

### 10.1.2 Symbole

Le moteur synchrone peut être représenté par son symbole général (*figure 10.1*) ou par un symbole qui précise s'il possède un inducteur bobiné (*figure 10.2*) ou un inducteur à aimants permanents (*figure 10.3*). Les représentations sont données pour des machines triphasées, ce qui est de loin le cas le plus fréquent, mais elles peuvent être adaptées pour des machines monophasées ou diphasées.

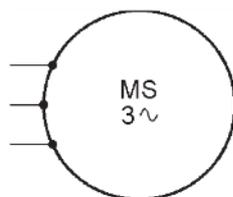


Figure 10.1 – Symbole général d'un moteur synchrone triphasé.

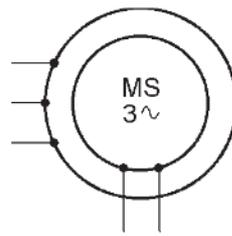


Figure 10.2 – Symbole d'un moteur synchrone triphasé à inducteur bobiné.

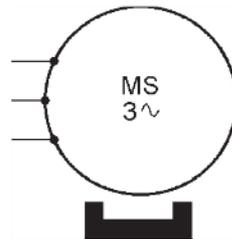


Figure 10.3 – Symbole d'un moteur synchrone triphasé à aimants.

### 10.1.3 Constitution

#### ■ Stator

Le stator du moteur synchrone est identique à celui du moteur asynchrone. Le circuit magnétique feuilleté porte un enroulement triphasé réparti dans des encoches. Ce bobinage constitue l'induit du moteur car il est le siège de forces électromotrices induites par le champ tournant.

#### ■ Rotor

Le rotor peut prendre diverses formes car l'excitation peut être produite soit par des aimants permanents montés en surfaces ou enterrés, soit par un bobinage placé dans des encoches ou sur des pôles saillants. Cet enroulement, destiné à être alimenté en continu, constitue l'inducteur du moteur car il sert à créer le champ magnétique qui va balayer les conducteurs de l'induit. Une variante particulière ne comporte aucune excitation au rotor et fonctionne grâce aux variations de réluctance.

#### □ Rotor à aimants

Le rotor est feuilleté et comporte des aimants permanents, soit montés en surface (*figure 10.4*), soit enterrés (*figure 10.5*).

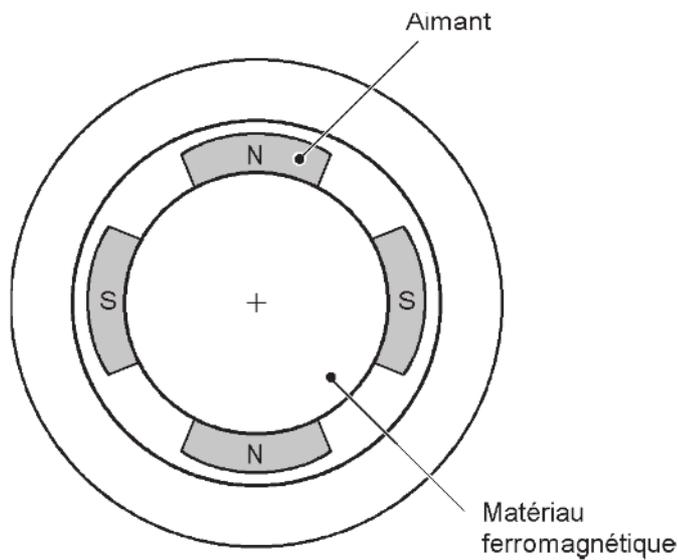


Figure 10.4 – Moteur synchrone à aimants montés en surface.

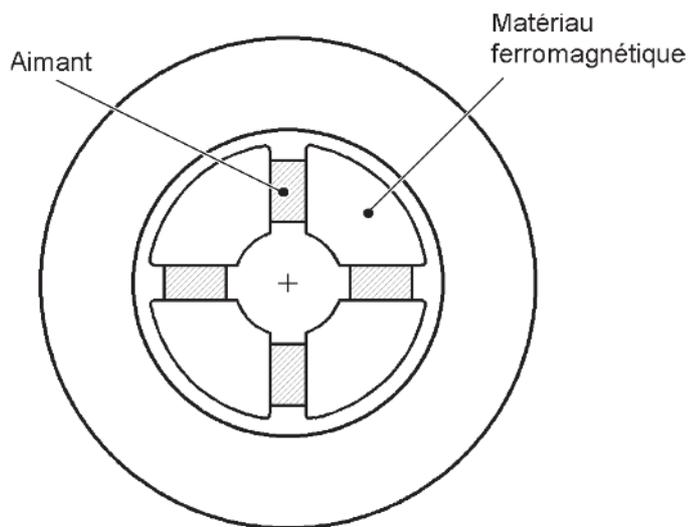


Figure 10.5 – Moteur synchrone à aimants enterrés.

#### □ Rotor bobiné

Les machines à rotor bobiné peuvent être à entrefer constant (*figure 10.6*) ou à pôles saillants (*figure 10.7*). Les encoches du stator n'ont pas été représentées sur ces schémas simplifiés.

Les rotors à pôles saillants sont bien adaptés aux machines multipolaires destinées à des vitesses de rotation basses ou moyennes.

Les lignes de champs sont fixes par rapport au rotor et ce dernier n'est donc pas le siège de courants de Foucault : il peut donc être massif, ce qui renforce sa solidité mécanique. Toutefois, la variation de réluctance due aux dents et aux encoches

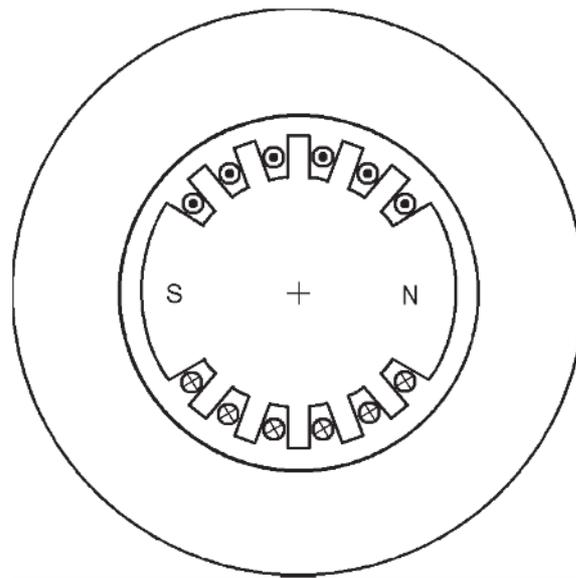


Figure 10.6 – Moteur synchrone à inducteur bobiné et à entrefer constant.

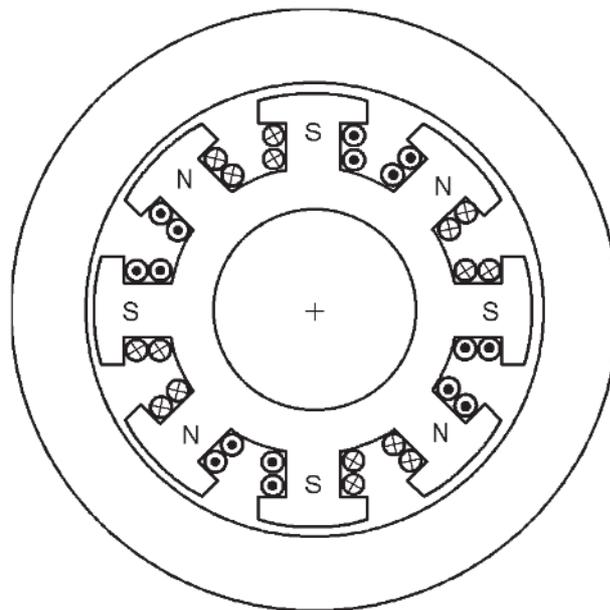


Figure 10.7 – Moteur synchrone à inducteur bobiné et à pôles saillants.

entraîne des variations de champ et il est souvent nécessaire de feuilletter les épanouissements polaires des rotors à pôles saillants et plus rarement les rotors lisses.

#### □ Rotor à réluctance variable

Pour ce type de machines, le rotor ne comporte ni aimants permanents, ni enroulements d'excitation (*figure 10.8*).

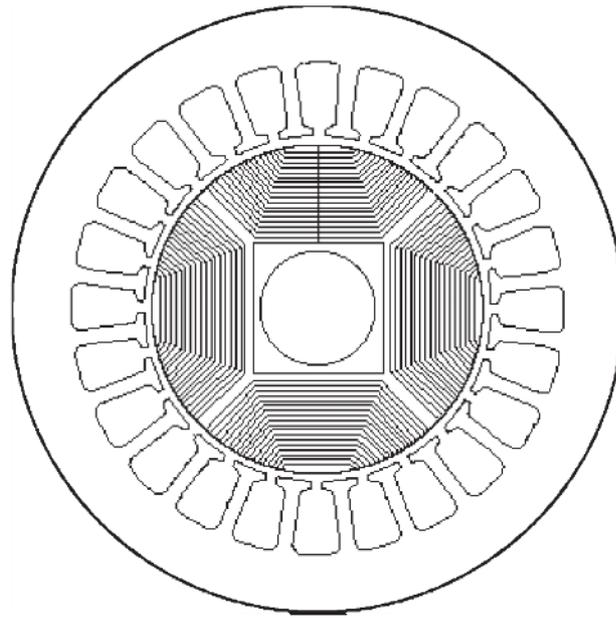


Figure 10.8 – Moteur synchrone à réluctance variable.

#### □ Amortisseurs

Les moteurs à rotor bobiné sont souvent munis d'amortisseurs. Ce sont des barres de cuivre placées dans des encoches à la périphérie des pôles et reliées entre elles pour former une portion de cage ou une cage complète analogue à celle d'un moteur asynchrone (figure 10.9). Les amortisseurs s'opposent aux oscillations consécutives aux changements brusques de fonctionnement. Ils permettent également de démarrer la machine comme un moteur asynchrone.

Dans les moteurs à rotor massif, l'effet d'amortissement est obtenu par la circulation des courants de Foucault dans le rotor massif.

Le rotor des moteurs à aimants ne comporte pas d'amortisseurs. Ceux-ci ne sont pas nécessaires pour la stabilité du fonctionnement ou le démarrage en moteur asynchrone car la machine est systématiquement associée à une alimentation électronique. De plus, leur présence serait néfaste au comportement dynamique du système.

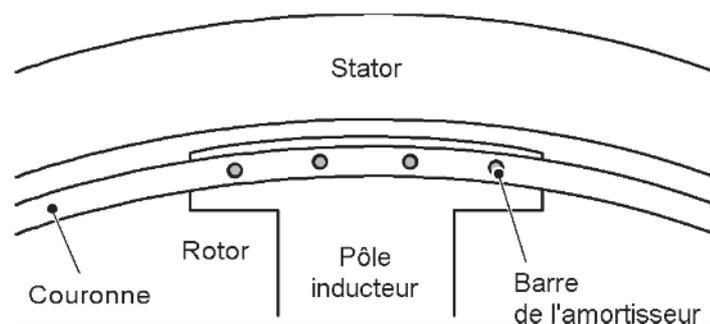


Figure 10.9 – Amortisseurs d'un rotor à pôles saillants.

### ■ Circuit d'excitation

Quand le rotor est bobiné, il faut alimenter l'enroulement inducteur qu'il porte.

#### □ Excitation par une source de tension continue extérieure

Une source de tension continue est réalisée classiquement par un redresseur branché sur le réseau. Un système de bagues et balais assure la liaison avec le rotor. Ce type de dispositif présente néanmoins des inconvénients, particulièrement à cause de la maintenance plus exigeante liée à la présence de contacts mobiles.

#### □ Excitation par un alternateur auxiliaire et un redresseur

Pour éviter l'utilisation d'un système de bagues et balais, on peut faire appel à un alternateur inversé, c'est-à-dire dont l'induit est tournant, solidaire de l'arbre du moteur, et dont l'inducteur est fixe. Un redresseur à diodes placé sur la partie tournante alimente directement l'inducteur du moteur. Ce circuit est toutefois soumis à des contraintes mécaniques importantes, particulièrement pour les machines à vitesse de rotation élevée.

### 10.1.4 Avantages et inconvénients

#### □ Moteur synchrone à aimants

Les moteurs synchrones à aimants présentent des avantages indéniables :

- fort couple massique ;
- bon rendement (absence de pertes par effet Joule au rotor) ;
- bonnes performances dynamiques grâce à la faiblesse des inductances statoriques due à la largeur importante de l'entrefer apparent (perméabilité des aimants voisine de celle de l'air) ;
- champ magnétique important dans l'entrefer ;
- pas de source de tension continue pour l'excitation.

Le principal inconvénient, en dehors du coût assez élevé, est l'ondulation du couple qui peut être néfaste dans certains domaines.

#### □ Moteur synchrone à rotor bobiné

Les moteurs synchrones à inducteur bobiné ont l'avantage d'avoir un facteur de puissance réglable par le courant d'excitation. Quand ils sont branchés directement sur le réseau, leurs principaux inconvénients sont l'impossibilité de démarrer sans artifice et le risque de décrochage si le couple résistant est trop important. Il leur faut par ailleurs une deuxième source d'énergie pour alimenter l'inducteur en continu.

### 10.1.5 Utilisation

Les moteurs synchrones sont rencontrés dans tous les domaines de puissance, de moins d'un watt à plus de dix mégawatts, mais avec des technologies différentes.

### □ Moteur synchrone à aimants

Les moteurs synchrones à aimants sont présents pour les petites et moyennes puissances, jusqu'à quelques dizaines de kilowatts, plus rarement jusqu'à quelques centaines de kilowatts. Ils sont systématiquement associés à une alimentation électronique. Cette catégorie d'applications comprend les machines-outils, les robots, et plus généralement les entraînements à performances élevées. Grâce à leur rendement élevé, les moteurs synchrones à aimants occupent également une place importante dans les prototypes de véhicules électriques ou hybrides.

### □ Moteur synchrone à rotor bobiné

Les moteurs synchrones à inducteur bobiné sont surtout utilisés dans le domaine des fortes puissances. Ils sont soit branchés directement sur le réseau, soit associés à une alimentation électronique. On rencontre à la fois des machines à entrefer constant et à pôles saillants.

Dans cette catégorie d'applications, on rencontre la traction ferroviaire, la propulsion des navires, les laminoirs, les compresseurs, les concasseurs. Toutefois, la concurrence des moteurs asynchrones a réduit l'usage des moteurs synchrones dans certaines de ces applications de forte puissance.

En traction ferroviaire, les moteurs synchrones ont fait l'objet d'études dans les années 1980, ce qui a conduit par exemple à la livraison à la SNCF des locomotives *Sybic* (deux moteurs synchrones de 2 800 kW) à partir de 1988 et des motrices TGV Atlantique (huit moteurs synchrones à pôles saillants de 1 100 kW chacun) à partir de 1989. Toutefois, dans les réalisations ultérieures, la préférence a été donnée aux moteurs asynchrones : la commande initiale de locomotives *Sybic* n'a même pas été menée à son terme, les derniers exemplaires ayant été remplacés par des motrices à entraînement asynchrone. En propulsion des navires, citons le paquebot *Star Princess* livré par les chantiers de l'Atlantique : il est équipé de deux moteurs de 12 MW chacun.

## 10.2 Principe

L'enroulement statorique, parcouru par un système triphasé équilibré de courants de pulsation  $\omega_s$ , crée une tension magnétique tournante d'entrefer à la vitesse synchrone  $\Omega_s$ , soit avec  $p$  paires de pôles :

$$\Omega_s = \frac{\omega_s}{p}$$

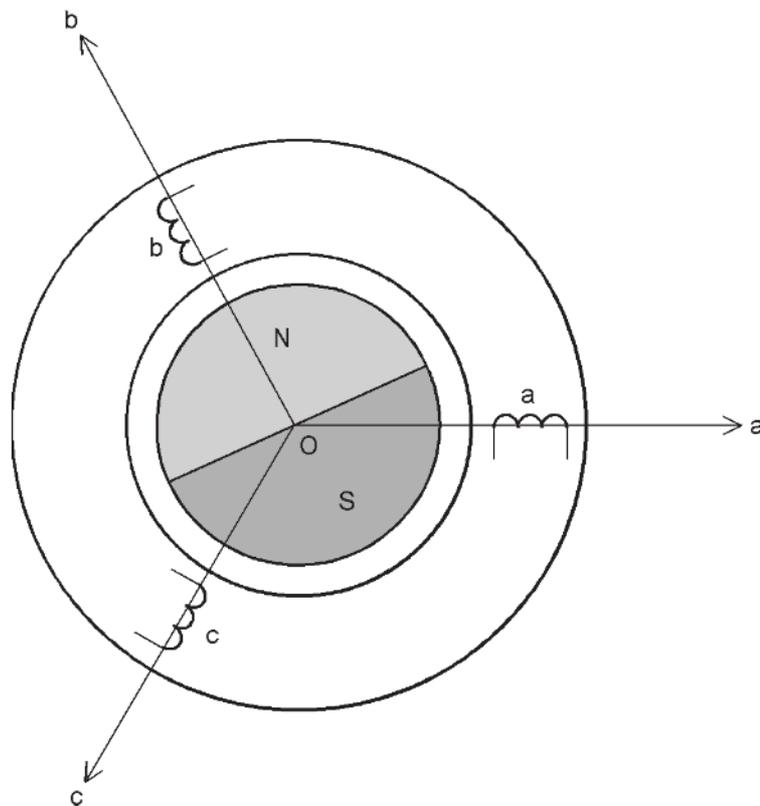
Le champ magnétique engendré par l'enroulement inducteur ou les aimants est fixe par rapport au rotor. L'interaction entre le champ tournant du stator et le champ fixe du rotor crée un couple dont le moment a une valeur moyenne nulle. Le moteur synchrone ne démarre pas spontanément. Par contre, si le rotor est entraîné à la vitesse synchrone, l'interaction entre les champs tournants du stator et du rotor crée un couple dont le moment a une valeur moyenne non nulle.

## 10.3 Modélisation

### 10.3.1 Hypothèses

Nous considérons séparément le moteur synchrone à aimants et le moteur synchrone à rotor bobiné.

Un moteur synchrone à aimants comporte un enroulement au stator dont les trois phases sont nommées a, b et c et au rotor des aimants permanents (*figure 10.10*).



**Figure 10.10** – Représentation des enroulements d'un moteur synchrone à aimants dans le plan électrique.

Un moteur synchrone à rotor bobiné comporte au stator un enroulement dont les trois phases sont nommées a, b et c, et au rotor un enroulement inducteur f et deux enroulements fictifs D et Q représentant les amortisseurs (*figure 10.11*).

La modélisation s'appuie sur un certain nombre d'hypothèses :

- la machine présente une parfaite symétrie triphasée de construction ;
- l'effet des encoches est négligé ;
- la répartition spatiale des tensions magnétiques d'entrefer est sinusoïdale ;
- le circuit magnétique est linéaire, la saturation, l'hystérésis et les pertes ferromagnétiques ne sont pas pris en compte ;

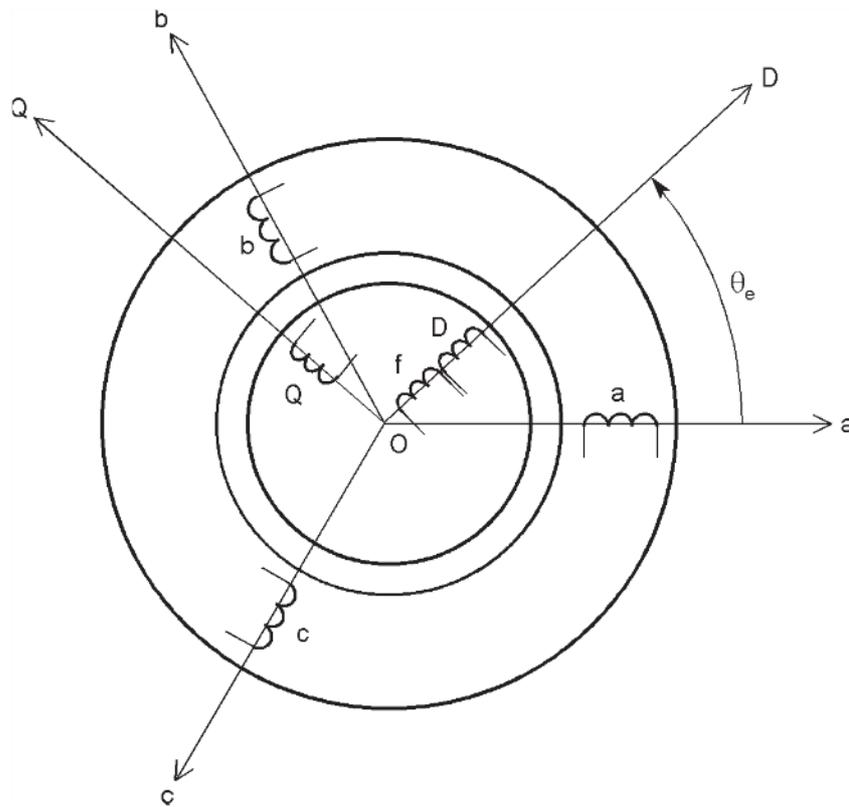


Figure 10.11 – Représentation des enroulements d'un moteur synchrone à rotor bobiné dans le plan électrique.

- les résistances sont constantes, la variation avec la température et l'effet de peau sont ignorés.

### 10.3.2 Moteur synchrone à aimants

#### ■ Équations électriques

Chaque phase présente une résistance  $R$ . Les tensions aux bornes des phases  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont respectivement appelées  $v_a$ ,  $v_b$  et  $v_c$ , les courants qui les parcourent  $i_a$ ,  $i_b$  et  $i_c$  et les flux totaux à travers ces bobines  $\psi_a$ ,  $\psi_b$  et  $\psi_c$ . Les lois des mailles s'écrivent ainsi :

$$v_a = R i_a + \frac{d\psi_a}{dt}$$

$$v_b = R i_b + \frac{d\psi_b}{dt}$$

$$v_c = R i_c + \frac{d\psi_c}{dt}$$

Ces relations peuvent s'écrire sous forme matricielle :

$$\mathbf{V} = R\mathbf{I} + \frac{d}{dt}\mathbf{\Psi}$$

en posant :

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Psi} = \begin{bmatrix} \Psi_a \\ \Psi_b \\ \Psi_c \end{bmatrix}$$

$\mathbf{V}$  est la matrice colonne des tensions,  $\mathbf{I}$  la matrice colonne des courants et  $\mathbf{\Psi}$  la matrice colonne des flux totaux.

#### ■ Relations entre flux et courants

Pour exprimer les flux totaux, définissons les flux totaux  $\Psi_{a0}$ ,  $\Psi_{b0}$  et  $\Psi_{c0}$  envoyés par les aimants dans les phases a, b et c, les inductances propres  $L_a$ ,  $L_b$  et  $L_c$  des phases a, b et c et les inductances mutuelles  $M_{ab}$ ,  $M_{ac}$  et  $M_{bc}$  entre les phases a et b, a et c, b et c. Les relations sont :

$$\Psi_a = \Psi_{a0} + L_a i_a + M_{ab} i_b + M_{ac} i_c$$

$$\Psi_b = \Psi_{b0} + M_{ab} i_a + L_b i_b + M_{bc} i_c$$

$$\Psi_c = \Psi_{c0} + M_{ac} i_a + M_{bc} i_b + L_c i_c$$

Considérons que le flux des aimants est à répartition sinusoïdale. Si  $\Psi_0$  est le flux maximal, les expressions des flux totaux envoyés dans les phases a, b et c sont :

$$\Psi_{a0} = \Psi_0 \cos p\theta$$

$$\Psi_{b0} = \Psi_0 \cos\left(p\theta - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\Psi_{c0} = \Psi_0 \cos\left(p\theta + \frac{2\pi}{3}\right)$$

Ces relations peuvent s'écrire sous forme matricielle :

$$\Psi = \Psi_0 + LI$$

en posant :

$$\Psi_0 = \psi_0 \begin{bmatrix} \cos p\theta \\ \cos\left(p\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(p\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix}$$

et :

$$L = \begin{bmatrix} L_a & M_{ab} & M_{ac} \\ M_{ab} & L_b & M_{bc} \\ M_{ac} & M_{bc} & L_c \end{bmatrix}$$

$\Psi_0$  est la matrice colonne des flux totaux créés par les aimants et  $L$  la matrice carrée des inductances.

#### □ Moteur synchrone à aimants montés en surface

Compte tenu que la perméabilité magnétique des aimants est voisine de celle de l'air, tout se passe comme si la machine était à entrefer constant. Les inductances propres et mutuelles sont donc constantes et ont même valeur quelle que soit la phase considérée. Appelons ainsi  $L_0$  l'inductance propre d'une phase de l'enroulement et  $M_0$  l'inductance mutuelle entre deux phases. La matrice des inductances est ainsi :

$$L = L_0 = \begin{bmatrix} L_0 & M_0 & M_0 \\ M_0 & L_0 & M_0 \\ M_0 & M_0 & L_0 \end{bmatrix}$$

L'équation électrique s'écrit :

$$V = RI + L \frac{dI}{dt} + \frac{d}{dt} \Psi_0$$

□ **Moteur synchrone à aimants enterrés**

Dans ce cas, les différentes inductances dépendent de l'angle  $\theta$ . La matrice des inductances est ainsi :

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_0 + L_v \cos 2p\theta & M_0 + L_v \cos\left(2p\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & M_0 + L_v \cos\left(2p\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ M_0 + L_v \cos\left(2p\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & L_0 + L_v \cos\left(2p\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & M_0 + L_v \cos 2p\theta \\ M_0 + L_v \cos\left(2p\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & M_0 + L_v \cos 2p\theta & L_0 + L_v \cos\left(2p\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix}$$

Cette matrice peut être mise sous la forme de la somme d'une matrice  $\mathbf{L}_0$  ne comportant que des termes constants (celle que nous avons rencontrée pour le moteur à aimants montés en surface) et d'une matrice  $\mathbf{L}_v$  ne comportant que des termes fonctions sinusoïdales de l'angle :

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_0 + \mathbf{L}_v$$

avec :

$$\mathbf{L}_v = L_v \begin{bmatrix} \cos 2p\theta & \cos\left(2p\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(2p\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(2p\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(2p\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos 2p\theta \\ \cos\left(2p\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos 2p\theta & \cos\left(2p\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix}$$

L'équation électrique s'écrit :

$$\mathbf{V} = R\mathbf{I} + \frac{d}{dt}(\mathbf{L}\mathbf{I} + \mathbf{\Psi}_0)$$

■ **Moment du couple électromagnétique**

Le moment du couple électromagnétique peut être calculé par la formule générale relative aux convertisseurs électromagnétiques comportant des aimants :

$$\gamma = {}^t\mathbf{I} \frac{d\mathbf{\Psi}_0}{d\theta} + \frac{1}{2} {}^t\mathbf{I} \frac{d\mathbf{L}}{d\theta} \mathbf{I}$$

□ **Moteur synchrone à aimants montés en surface**

Comme la matrice des inductances ne comprend que des constantes, la formule se réduit à :

$$\gamma = {}^t I \frac{d\Psi_0}{d\theta}$$

Le calcul peut être développé :

$$\gamma = \begin{bmatrix} i_a & i_b & i_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -p\Psi_0 \sin p\theta \\ -p\Psi_0 \sin\left(p\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ -p\Psi_0 \sin\left(p\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix}$$

Effectuons le produit matriciel :

$$\gamma = -p\Psi_0 \left[ i_a \sin p\theta + i_b \sin\left(p\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + i_c \sin\left(p\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \right]$$

Modifions cette expression en utilisant la formule trigonométrique :

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

Cela conduit à :

$$\gamma = p\Psi_0 \left[ \left( -i_a + \frac{1}{2}i_b + \frac{1}{2}i_c \right) \sin p\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}(i_b - i_c) \cos p\theta \right]$$

La formule obtenue n'est guère utilisable dans la pratique et nous préférons utiliser celle que nous obtiendrons après application de la transformation de Park.

□ **Moteur synchrone à aimants enterrés**

Le moment du couple électromagnétique peut être calculé par :

$$\gamma = {}^t I \frac{d\Psi_0}{d\theta} + \frac{1}{2} {}^t I \frac{dL}{d\theta} I$$

Le premier terme, prépondérant, correspond à l'interaction entre les courants statoiriques et les aimants. Le second est un couple de réluctance variable.

Il est possible de développer le calcul de la même façon que pour le moteur à aimants montés en surface, mais la formule obtenue est encore plus compliquée et présente donc peu d'intérêt.

### 10.3.3 Moteur synchrone à rotor bobiné

#### ■ Équations électriques

Chaque phase statorique présente une résistance  $R_s$ . Les tensions aux bornes des phases a, b et c sont respectivement appelées  $v_a$ ,  $v_b$  et  $v_c$ , les courants qui les parcourent  $i_a$ ,  $i_b$  et  $i_c$  et les flux totaux à travers ces bobines  $\Psi_a$ ,  $\Psi_b$  et  $\Psi_c$ . Les lois des mailles s'écrivent ainsi :

$$v_a = R_s i_a + \frac{d\Psi_a}{dt}$$

$$v_b = R_s i_b + \frac{d\Psi_b}{dt}$$

$$v_c = R_s i_c + \frac{d\Psi_c}{dt}$$

Ces relations peuvent s'écrire sous forme matricielle :

$$\mathbf{V}_s = R_s \mathbf{I}_s + \frac{d}{dt} \mathbf{\Psi}_s$$

en posant :

$$\mathbf{V}_s = \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I}_s = \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Psi}_s = \begin{bmatrix} \Psi_a \\ \Psi_b \\ \Psi_c \end{bmatrix}$$

$\mathbf{V}_s$  est la matrice colonne des tensions,  $\mathbf{I}_s$  la matrice colonne des courants et  $\mathbf{\Psi}_s$  la matrice colonne des flux totaux pour le stator.

L'enroulement inducteur présente une résistance  $R_f$ . La tension à ses bornes est appelée  $v_f$ , le courant qui le parcourt  $i_f$  et le flux total à travers cette bobine  $\Psi_f$ . L'équation électrique pour l'enroulement inducteur s'écrit :

$$v_f = R_f i_f + \frac{d\Psi_f}{dt}$$

Les amortisseurs sont modélisés par des bobines en court-circuit dont la résistance est  $R_A$ . Les courants qui les parcourent sont nommés  $i_D$  et  $i_Q$  et les flux à travers ces bobines sont appelés  $\Psi_D$  et  $\Psi_Q$ . Les équations relatives aux amortisseurs sont :

$$0 = R_A i_D + \frac{d\Psi_D}{dt}$$

$$0 = R_A i_Q + \frac{d\Psi_Q}{dt}$$

Ces relations peuvent s'écrire sous forme matricielle :

$$\mathbf{V}_r = \mathbf{R}_r \mathbf{I}_r + \frac{d}{dt} \mathbf{\Psi}_r$$

en posant :

$$\mathbf{V}_r = \begin{bmatrix} v_f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I}_r = \begin{bmatrix} i_f \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Psi}_r = \begin{bmatrix} \Psi_f \\ \Psi_D \\ \Psi_Q \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_r = \begin{bmatrix} R_f & 0 & 0 \\ 0 & R_A & 0 \\ 0 & 0 & R_A \end{bmatrix}$$

$\mathbf{V}_r$  est la matrice colonne des tensions,  $\mathbf{I}_r$  la matrice colonne des courants,  $\mathbf{\Psi}_r$  la matrice colonne des flux totaux et  $\mathbf{R}_r$  la matrice carrée des résistances pour le rotor.

#### ■ Relations entre flux et courants

Les relations entre flux totaux et les courants peuvent s'écrire sous forme matricielle :

$$\mathbf{\Psi}_s = \mathbf{L}_s \mathbf{I}_s + \mathbf{M}_{sr} \mathbf{I}_r$$

$$\mathbf{\Psi}_r = {}^t \mathbf{M}_{sr} \mathbf{I}_s + \mathbf{L}_r \mathbf{I}_r$$

en posant :

$$\mathbf{L}_s = \begin{bmatrix} L_a & M_{ab} & M_{ac} \\ M_{ab} & L_b & M_{bc} \\ M_{ac} & M_{bc} & L_c \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_r = \begin{bmatrix} L_f & M_{fD} & 0 \\ M_{fD} & L_A & 0 \\ 0 & 0 & L_A \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{sr} = \begin{bmatrix} M_{af} & M_{aD} & M_{aQ} \\ M_{bf} & M_{bD} & M_{bQ} \\ M_{cf} & M_{cD} & M_{cQ} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{L}_s$  et  $\mathbf{L}_r$  sont respectivement les matrices des inductances statoriques et rotoriques tandis que  $\mathbf{M}_{sr}$  est la matrice des inductances mutuelles entre stator et rotor.

Comme le stator est lisse (en négligeant l'effet des encoches), les inductances propres de l'inducteur et des amortisseurs,  $L_f$  et  $L_A$  et l'inductance mutuelle entre inducteur et amortisseur D,  $M_{fD}$  sont constantes. Par ailleurs, les inductances mutuelles entre inducteur et amortisseur Q et entre amortisseur D et amortisseur Q sont nulles puisque les axes sont en quadrature.

#### □ Moteur à entrefer constant

Comme le rotor est lisse (en négligeant l'effet des encoches), les inductances propres des phases du stator et les inductances mutuelles entre ces phases sont constantes. La matrice des inductances statoriques est donc :

$$\mathbf{L}_s = \begin{bmatrix} L_0 & M_0 & M_0 \\ M_0 & L_0 & M_0 \\ M_0 & M_0 & L_0 \end{bmatrix}$$

#### □ Moteur à pôles saillants

Les équations électriques s'écrivent :

$$\mathbf{V}_s = \mathbf{R}_s \mathbf{I}_s + \frac{d}{dt} (\mathbf{L}_s \mathbf{I}_s + \mathbf{M}_{sr} \mathbf{I}_r)$$

$$\mathbf{V}_r = \mathbf{R}_r \mathbf{I}_r + \frac{d}{dt} (\mathbf{M}_{rs} \mathbf{I}_s + \mathbf{L}_r \mathbf{I}_r)$$

Du fait de la saillance du rotor, les différentes inductances statoriques dépendent de l'angle  $\theta$ . La matrice des inductances statoriques est ainsi :

$$\mathbf{L}_s = \begin{bmatrix} L_0 + L_v \cos 2p\theta & M_0 + L_v \cos\left(2p\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & M_0 + L_v \cos\left(2p\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ M_0 + L_v \cos\left(2p\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & L_0 + L_v \cos\left(2p\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & M_0 + L_v \cos 2p\theta \\ M_0 + L_v \cos\left(2p\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & M_0 + L_v \cos 2p\theta & L_0 + L_v \cos\left(2p\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix}$$

### ■ Moment du couple électromagnétique

Le moment du couple électromagnétique peut être calculé par la formule générale relative aux convertisseurs électromagnétiques sans aimant :

$$\gamma = \frac{1}{2} \mathbf{I}^t \frac{d\mathbf{L}}{d\theta} \mathbf{I}$$

### □ Moteur à entrefer constant

Comme les matrices des inductances statoriques et rotoriques ne comportent que des constantes, la formule se simplifie :

$$\gamma = {}^t \mathbf{I}_s \frac{dM_{sr}}{d\theta} \mathbf{I}_r$$

### □ Moteur à pôles saillants

Ici, seule la matrice des inductances rotoriques ne comporte que des constantes, ce qui conduit à :

$$\gamma = {}^t \mathbf{I}_s \frac{dM_{sr}}{d\theta} \mathbf{I}_r + \frac{1}{2} {}^t \mathbf{I}_s \frac{d\mathbf{L}_s}{d\theta} \mathbf{I}_s$$

## 10.3.4 Moteur synchrone à réductance variable

### ■ Équations électriques

Ce sont les mêmes que pour le moteur synchrone à aimants, ce qui conduit à la relation matricielle :

$$\mathbf{V} = R\mathbf{I} + \frac{d}{dt} \boldsymbol{\Psi}$$

### ■ Relations entre flux et courants

Là encore, il suffit de reprendre les équations du moteur synchrone à aimants enterrés, mais en supprimant les flux produits par les aimants, ce qui conduit à la relation matricielle :

$$\Psi = LI$$

On peut combiner les deux relations précédentes :

$$V = RI + L \frac{dI}{dt} + \omega_e \frac{\partial L}{\partial \theta_e} I$$

### ■ Moment du couple électromagnétique

Le moment du couple électromagnétique peut être calculé par la formule générale relative aux convertisseurs électromagnétiques sans aimant :

$$\gamma = \frac{1}{2} I \frac{dL}{d\theta} I$$

## 10.4 Application de la transformation de Park

La transformation de Park permet de remplacer l'enroulement triphasé statorique par un enroulement diphasé tournant. Pour simplifier les équations, il faut choisir la vitesse de rotation de l'enroulement diphasé fictif égale à la vitesse de rotation du rotor de la machine.

### 10.4.1 Moteur synchrone à aimants

#### ■ Équations électriques

Les équations des enroulements statoriques ont même forme que celles obtenues pour le moteur asynchrone ; elles subissent donc la même transformation :

$$v_d = Ri_d + \frac{d\psi_d}{dt} - \psi_q \omega_e$$

$$v_q = Ri_q + \frac{d\psi_q}{dt} + \psi_d \omega_e$$

$$v_h = Ri_h + \frac{d\psi_h}{dt}$$

#### ■ Relations entre flux et courants

Partons de la relation :

$$\Psi = \Psi_0 + LI$$

Multiplions à gauche par la matrice de Park pour obtenir la matrice colonne des composantes de Park des flux totaux :

$$P\Psi = P\Psi_0 + PLI$$

Calculons le premier terme de la somme apparaissant au second membre :

$$P\Psi_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos\theta_e & \cos\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) \\ -\sin\theta_e & -\sin\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \Psi_0 \begin{bmatrix} \cos\theta_e \\ \cos\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix}$$

Pour le calcul des coefficients de cette matrice, transformons les produits de fonctions trigonométriques en sommes par les formules :

$$\cos^2 a = \frac{1}{2}(\cos 2a + 1)$$

$$\sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a$$

Tenons compte également du fait que la somme de trois fonctions sinusoïdales régulièrement déphasées de  $\frac{2\pi}{3}$  est nulle :

$$\cos x + \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = 0$$

Nous obtenons ainsi :

$$P\Psi_0 = \sqrt{\frac{3}{2}} \Psi_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

#### □ Moteur synchrone à aimants montés en surface

Dans ce cas, le second terme de la somme apparaissant au second membre est identique à l'un des termes rencontré dans le même calcul pour le moteur asynchrone. Utilisons donc le résultat obtenu alors :

$$PLI = \begin{bmatrix} (L_0 - M_0) i_d \\ (L_0 - M_0) i_q \\ (L_0 + 2M_0) i_h \end{bmatrix}$$

En définitive, la relation entre les composantes de Park des flux et des courants s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \Psi_d \\ \Psi_q \\ \Psi_h \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{3}{2}} \Psi_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (L_0 - M_0) i_d \\ (L_0 - M_0) i_q \\ (L_0 + 2M_0) i_h \end{bmatrix}$$

Posons :

$$\Psi_{d0} = \sqrt{\frac{3}{2}} \Psi_0$$

$$L = L_0 - M_0$$

$$L_h = L_0 + 2M_0$$

$L$  est l'inductance cyclique et  $L_h$  l'inductance homopolaire. Les expressions des composantes de Park des flux totaux sont ainsi :

$$\Psi_d = L i_d + \Psi_{d0}$$

$$\Psi_q = L i_q$$

$$\Psi_h = L_h i_h$$

Ces expressions peuvent être utilisées pour éliminer les flux dans les équations électriques :

$$v_d = R i_d + L \frac{d i_d}{d t} - \omega_e L i_q$$

$$v_q = R i_q + L \frac{d i_q}{d t} + \omega_e L i_d + \omega_e \Psi_{d0}$$

#### □ Moteur synchrone à aimants enterrés

Dans ce cas, le deuxième terme de la somme du second membre doit être décomposé :

$$PLI = PL_0 I + PL_v I$$

Le premier terme de cette nouvelle somme a déjà été calculé dans le cas du moteur à aimants montés en surface. Il nous reste à nous intéresser au second terme que nous écrirons en faisant apparaître la matrice colonne des composantes de Park du courant :

$$PL_v I = PL_v P^{-1} I_p$$

Effectuons le produit par étapes :

$$L_v P^{-1} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta_e & \cos\left(2\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(2\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(2\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(2\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos 2\theta_e \\ \cos\left(2\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos 2\theta_e & \cos\left(2\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_e & -\sin\theta_e & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Après utilisation des formules trigonométriques de transformations des produits en sommes et en tenant compte de la valeur nulle de la somme de sinusoides triphasées, nous obtenons :

$$L_v P^{-1} = L_v \sqrt{\frac{3}{2}} \begin{bmatrix} \cos\theta_e & \sin\theta_e & 0 \\ \cos\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) & 0 \\ \cos\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) & 0 \end{bmatrix}$$

Multiplions à gauche le résultat par  $P$  :

$$P L_v P^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta_e & \cos\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) \\ -\sin\theta_e & -\sin\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}} L_v \sqrt{\frac{3}{2}} \begin{bmatrix} \cos\theta_e & \sin\theta_e & 0 \\ \cos\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) & 0 \\ \cos\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) & 0 \end{bmatrix}$$

Nos obtenons, toujours après application des formules trigonométriques :

$$PL_v P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il reste à multiplier par la matrice colonne des composantes de Park du courant :

$$PL_v P^{-1} I_p = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} i_d \\ -\frac{3}{2} i_q \\ 0 \end{bmatrix}$$

En définitive, la relation entre les composantes de Park des flux et des courants s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \Psi_d \\ \Psi_q \\ \Psi_h \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{3}{2}} \Psi_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (L_0 - M_0) i_d \\ (L_0 - M_0) i_q \\ (L_0 + 2M_0) i_h \end{bmatrix} + \frac{3}{2} \begin{bmatrix} i_d \\ -i_q \\ 0 \end{bmatrix}$$

Posons :

$$\Psi_{d0} = \sqrt{\frac{3}{2}} \Psi_0$$

$$L_d = L_0 - M_0 + \frac{3}{2} L_v$$

$$L_q = L_0 - M_0 - \frac{3}{2} L_v$$

$$L_h = L_0 + 2M_0$$

$L_d$  est l'inductance cyclique d'axe direct,  $L_q$  l'inductance cyclique d'axe en quadrature et  $L_h$  l'inductance homopolaire. Les expressions des composantes de Park des flux totaux sont ainsi :

$$\Psi_d = L_d i_d + \Psi_{d0}$$

$$\Psi_q = L_q i_q$$

$$\Psi_h = L_h i_h$$

Ces expressions peuvent être utilisées pour éliminer les flux dans les équations électriques :

$$v_d = R i_d + L_d \frac{di_d}{dt} - \omega_e L_q i_q$$

$$v_q = R i_q + L_q \frac{di_q}{dt} + \omega_e L_d i_d + \omega_e \Psi_{d0}$$

### ■ Expression du moment du couple

#### □ Moteur synchrone à aimants montés en surface

Reprenons l'expression du moment du couple électromagnétique :

$$\gamma = {}^t I \frac{d\Psi_0}{d\theta}$$

Introduisons les composantes de Park des courants et des flux des aimants :

$$I_p = P I$$

$$\Psi_{0p} = P \Psi_0$$

Le calcul des produits de matrices donne :

$$\gamma = p \Psi_{d0} i_q$$

#### □ Moteur synchrone à aimants enterrés

Reprenons l'expression du moment du couple électromagnétique :

$$\gamma = {}^t I \frac{d\Psi_0}{d\theta} + \frac{1}{2} {}^t I \frac{dL}{d\theta} I$$

Introduisons les composantes de Park des courants et des flux des aimants et calculons le produit des matrices. Nous obtenons :

$$\gamma = p \Psi_{d0} i_q + p (L_d - L_q) i_d i_q$$

Le premier terme, prépondérant, correspond à l'interaction entre les courants statiques et les aimants. Le second est un couple de réluctance variable.

Une autre expression du moment du couple électromagnétique est obtenue en introduisant les flux totaux :

$$\Psi_d = L_d i_d + \Psi_{d0}$$

$$\Psi_q = L_q i_q$$

Nous vérifions en effet que :

$$\gamma = p(\Psi_d i_q - \Psi_q i_d)$$

### 10.4.2 Moteur synchrone à rotor bobiné

#### ■ Équations électriques

Les équations des enroulements statoriques sont identiques à celles obtenues pour le moteur à aimants :

$$v_d = R_s i_d + \frac{d\Psi_d}{dt} - \Psi_q \omega_e$$

$$v_q = R_s i_q + \frac{d\Psi_q}{dt} + \Psi_d \omega_e$$

$$v_b = R_s i_b + \frac{d\Psi_b}{dt}$$

Les équations des enroulements rotoriques ne subissent pas de modifications car elles sont déjà exprimées dans le système d'axes dq lié au rotor :

$$v_f = R_f i_f + \frac{d\Psi_f}{dt}$$

$$0 = R_A i_D + \frac{d\Psi_D}{dt}$$

$$0 = R_A i_Q + \frac{d\Psi_Q}{dt}$$

#### ■ Relations entre flux et courants

Partons des relations :

$$\Psi_s = L_s I_s + M_{sr} I_r$$

$$\Psi_r = M_{sr} I_s + L_r I_r$$

Un calcul analogue à celui qui vient d'être fait pour le moteur à aimants conduit aux relations :

$$\Psi_d = L_d i_d + M_{fd} i_f + M_{dD} i_D$$

$$\Psi_q = L_q i_q + M_{qQ} i_Q$$

$$\Psi_f = L_f i_f + M_{fd} i_d + M_{fD} i_D$$

$$\Psi_D = L_D i_D + M_{fD} i_f + M_{dD} i_d$$

$$\Psi_Q = L_Q i_Q + M_{qQ} i_q$$

En remplaçant les flux dans les équations des tensions, nous obtenons :

$$v_d = R_s i_d + L_d \frac{di_d}{dt} + M_{fd} \frac{di_f}{dt} + M_{dD} \frac{di_D}{dt} - \omega_e L_q i_q - \omega_e M_{qQ} i_Q$$

$$v_q = R_s i_q + L_q \frac{di_q}{dt} + M_{qQ} \frac{di_Q}{dt} + \omega_e L_d i_d + \omega_e M_{fd} i_f + \omega_e M_{fD} i_D$$

$$v_b = R_s i_b + L_b \frac{di_b}{dt}$$

$$v_f = R_f i_f + L_f \frac{di_f}{dt} + M_{fd} \frac{di_d}{dt} + M_{fD} \frac{di_D}{dt}$$

$$0 = R_A i_D + L_D \frac{di_D}{dt} + M_{fD} \frac{di_f}{dt} + M_{dD} \frac{di_d}{dt}$$

$$0 = R_A i_Q + L_Q \frac{di_Q}{dt} + M_{qQ} \frac{di_q}{dt}$$

#### ■ Expression du moment du couple

#### □ Moteur à entrefer constant

Reprenons l'expression du moment du couple électromagnétique :

$$\gamma = {}^t \mathbf{I}_s \frac{d\mathbf{M}_{sr}}{d\theta} \mathbf{I}_r$$

Introduisons les composantes de Park des courants :

$$\mathbf{I}_{sP} = \mathbf{P} \mathbf{I}_s$$

$$\mathbf{I}_{rP} = \mathbf{P} \mathbf{I}_r$$

Le calcul des produits de matrices donne :

$$\gamma = p M_{fd} i_f i_q + p (M_{dD} i_D i_q - M_{qQ} i_Q i_d)$$

Le premier terme, prépondérant, correspond à l'interaction entre les courants statiques et les courants rotoriques et le second est un couple asynchrone dû aux amortisseurs.

Une autre expression du moment du couple électromagnétique est obtenue en introduisant les flux totaux :

$$\Psi_d = L i_d + M_{fd} i_f + M_{dD} i_D$$

$$\Psi_q = L i_q + M_{qQ} i_Q$$

Nous vérifions en effet que :

$$\gamma = p(\Psi_d i_q - \Psi_q i_d)$$

#### □ Moteur à pôles saillants

Reprenons l'expression du moment du couple électromagnétique :

$$\gamma = \tau I_s \frac{dM_{sr}}{d\theta} I_r + \frac{1}{2} \tau I_s \frac{dL_s}{d\theta} I_s$$

Le calcul des produits de matrices donne :

$$\gamma = p M_{fd} i_f i_q + p(L_d - L_q) i_d i_q + p(M_{dD} i_D i_q - M_{qQ} i_Q i_d)$$

Le premier terme, prépondérant, correspond à l'interaction entre les courants statiques et les courants rotoriques, le second est un couple de réductance variable dû à la saillance du rotor, et le troisième est un couple asynchrone dû aux amortisseurs. Une autre expression du moment du couple électromagnétique est obtenue en introduisant les flux totaux :

$$\Psi_d = L_d i_d + M_{fd} i_f + M_{dD} i_D$$

$$\Psi_q = L_q i_q + M_{qQ} i_Q$$

Nous vérifions en effet que :

$$\gamma = p(\Psi_d i_q - \Psi_q i_d)$$

### 10.4.3 Moteur synchrone à réductance variable

#### ■ Équations électriques

Il suffit de reprendre les expressions obtenues pour le moteur synchrone à aimants enterrés en annulant le flux produit par les aimants, ce qui conduit à :

$$v_d = R i_d + L_d \frac{di_d}{dt} - \omega_e L_q i_q$$

$$v_q = R i_q + L_q \frac{di_q}{dt} + \omega_e L_d i_d$$

#### ■ Expression du moment du couple

Là encore, il suffit de reprendre l'expression obtenue pour le moteur synchrone à aimants enterrés en annulant le flux produit par les aimants. Il ne reste donc que le couple de réductance variable :

$$\gamma = p(L_d - L_q) i_d i_q$$

## 10.5 Ondulation du couple

Un inconvénient notable des moteurs synchrones à aimants est la présence d'une ondulation du couple. Ce phénomène a deux origines tout à fait distinctes.

### 10.5.1 Effet des encoches

La première cause de d'ondulation du couple est l'interaction entre les aimants du rotor et les variations de réluctance du stator dues à la présence d'encoches. Le champ magnétique dans l'entrefer a globalement une répartition sinusoïdale, mais avec une variation supplémentaire due aux encoches (*figure 10.12*).

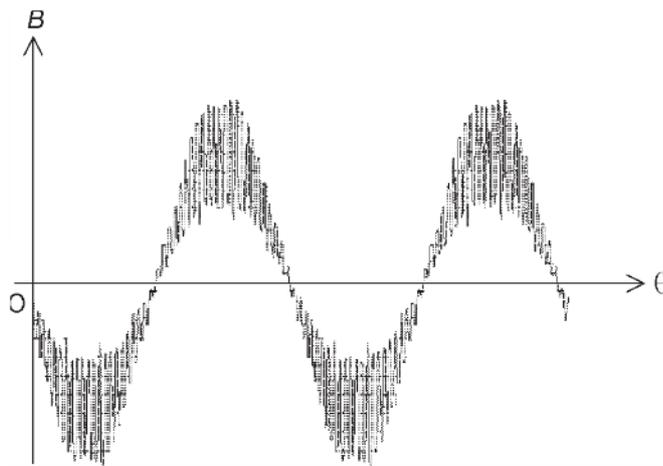


Figure 10.12 – Répartition du champ magnétique dans l'entrefer.

Considérons un pôle nord du rotor (*figure 10.13*). Dans la position 1, le milieu du pôle est en face d'une dent et les couples dus à la réluctance variable des dents se compensent. Ce n'est pas le cas en position 2, quand le rotor a tourné d'une fraction de pas dentaire. Dans ce cas, le couple tend à ramener le rotor à sa position précédente.

Le moment de ce couple peut atteindre 3 % du moment du couple nominal. Il ne dépend pas de l'intensité du courant, mais seulement de l'angle qui définit la position du rotor. La fréquence  $f_c$  de cette ondulation dépend du nombre  $N_e$  d'encoches, du nombre  $p$  de paires de pôles et de la vitesse de rotation  $\omega_m$  du rotor :

$$f_c = \frac{N_e}{p} \frac{\omega_m}{2\pi}$$

Différentes méthodes de réduction de ce phénomène sont employées à la construction de la machine. La plus courante est l'inclinaison des encoches. Cette disposition est efficace, mais elle entraîne néanmoins une diminution du couple moyen et complique la fabrication de la machine et donc augmente son coût.

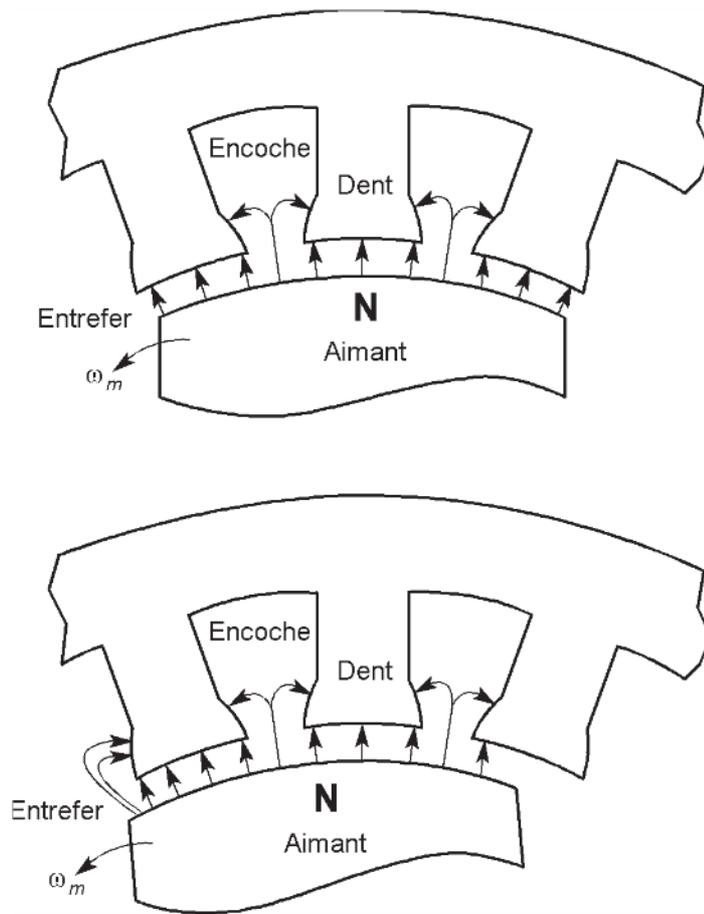


Figure 10.13 – Effet des encoches du stator sur le couple.

### 10.5.2 Effet de la répartition spatiale

La deuxième cause d'ondulation du couple est l'interaction entre le champ du stator et le champ du rotor. Pour qu'il n'y ait pas d'ondulation, il faudrait que la répartition spatiale de ces champs soit parfaitement sinusoïdale, ce qui est difficile à obtenir pour les rotors à aimant. Le moment de ce couple peut atteindre 2 à 4 % du moment du couple nominal. Il dépend de l'intensité du courant et de l'angle électrique qui définit la position du rotor. Les principales composantes de cette ondulation ont une fréquence égale à six fois et douze fois la fréquence statorique. La réduction de ce phénomène à la construction consiste à adapter l'usinage et la mise en place des aimants pour essayer de se rapprocher de la distribution sinusoïdale. L'ondulation du couple a une valeur moyenne nulle et ne produit que des vibrations et du bruit. Ces phénomènes peuvent être accentués dans les entraînements à vitesse variable quand la fréquence d'une composante de l'ondulation coïncide avec une fréquence de résonance mécanique du système.

### 10.5.3 Remèdes

La prise en compte de la minimisation de l'ondulation du couple lors de la construction du moteur est un facteur d'augmentation de son coût. Ce n'est toutefois pas la seule action possible. L'autre méthode consiste à agir au niveau de la commande en optimisant la forme d'onde du courant. Cette solution est connue sous le nom d'injection d'harmoniques. La première possibilité consiste à définir la forme du courant à partir de la connaissance de l'ondulation. Le résultat est médiocre du fait de l'imperfection de la modélisation de l'ondulation du couple et de la variation des paramètres du moteur. Une méthode plus efficace fait appel à une commande en boucle fermée utilisant des estimateurs de flux et de couple.

Copyright © 2005 Dunod. Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite à l'exception des cas prévus aux termes de l'article L.122-5, 2° et 3° a) du Code de la Propriété Intellectuelle.

# 11 • MOTEUR SYNCHRONES EN RÉGIME PERMANENT

---

## 11.1 Simplification des équations

### 11.1.1 Composantes de Park des tensions

Les tensions appliquées aux trois phases forment un système triphasé équilibré. Leur pulsation est  $\omega_s$  et leur amplitude commune est  $V_M$  :

$$v_a = V_M \cos(\omega_s t + \alpha)$$

$$v_b = V_M \cos\left(\omega_s t + \alpha - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$v_c = V_M \cos\left(\omega_s t + \alpha + \frac{2\pi}{3}\right)$$

La valeur de l'angle  $\alpha$  dépend du choix de l'origine des temps. Celui-ci sera fait plus loin.

Le rotor tourne à la vitesse synchrone. Sa vitesse électrique est donc égale à la pulsation statorique :

$$\omega_e = \omega_s$$

Choisissons l'origine des temps à un instant où l'axe polaire coïncide avec l'axe de la phase a. L'angle électrique définissant la position du rotor est :

$$\theta_e = \omega_s t$$

Appliquons la transformation de Park avec un repère dq solide du rotor. En régime permanent, la composante directe est donnée par la formule établie au paragraphe 6.2.4 :

$$v_d = \sqrt{\frac{3}{2}} V_M \cos(\omega_s t + \alpha - \theta_e)$$

Introduisons l'expression de  $\theta_e$  en fonction de  $t$  :

$$v_d = \sqrt{\frac{3}{2}} V_M \cos \alpha$$

De la même façon, en régime permanent, la composante en quadrature est donnée par la formule établie au paragraphe 6.2.4 :

$$v_q = \sqrt{\frac{3}{2}} V_M \sin(\omega_s t + \alpha - \theta_e)$$

En introduisant l'expression de  $\theta_e$  en fonction de  $t$ , nous arrivons à :

$$v_q = \sqrt{\frac{3}{2}} V_M \sin \alpha$$

Comme nous l'avons vu au paragraphe 6.2.4, la composante homopolaire est nulle en régime permanent :

$$v_h = 0$$

### 11.1.2 Composantes de Park des courants

Les courants qui parcourent les trois phases forment également un système triphasé équilibré de même pulsation  $\omega_s$ . Leur amplitude commune est  $I_M$  et leur déphasage par rapport à la tension est  $\varphi$ .

$$i_a = I_M \cos(\omega_s t + \alpha - \varphi)$$

$$i_b = I_M \cos\left(\omega_s t + \alpha - \varphi - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$i_c = I_M \cos\left(\omega_s t + \alpha - \varphi + \frac{2\pi}{3}\right)$$

Le calcul des composantes de Park est identique à celui que nous venons de mener pour les tensions. Cela donne :

$$i_d = \sqrt{\frac{3}{2}} I_M \cos(\alpha - \varphi)$$

$$i_q = \sqrt{\frac{3}{2}} I_M \sin(\alpha - \varphi)$$

$$i_h = 0$$

En régime permanent, avec un repère dq solide du rotor, les composantes directes et en quadrature des tensions et des courants sont constantes et les composantes homopolaires sont nulles.

### 11.1.3 Courants dans les amortisseurs

Reprenons les relations établies au paragraphe 10.4.2 :

$$0 = R_A i_D + L_D \frac{di_D}{dt} + M_{fD} \frac{di_f}{dt} + M_{dD} \frac{di_d}{dt}$$

$$0 = R_A i_Q + L_Q \frac{di_Q}{dt} + M_{qQ} \frac{di_d}{dt}$$

En régime permanent, le courant  $i_f$  dans l'inducteur est continu et nous venons de montrer que les composantes directe  $i_d$  et en quadrature  $i_q$  des courants sont constantes. Les dérivées de ces trois intensités sont donc nulles et les relations précédentes se simplifient :

$$0 = R_A i_D + L_D \frac{di_D}{dt}$$

$$0 = R_A i_Q + L_Q \frac{di_Q}{dt}$$

La solution permanente de ces deux équations différentielles est nulle :

$$i_D = i_Q = 0$$

Aucun courant n'est induit dans les amortisseurs en régime permanent synchrone.

### 11.1.4 Équation du circuit inducteur

Reprenons la relation établie au paragraphe 10.4.2 :

$$v_f = R_f i_f + L_f \frac{di_f}{dt} + M_{fd} \frac{di_d}{dt} + M_{fD} \frac{di_D}{dt}$$

Comme les courants  $i_f$  et  $i_d$  sont constants et que le courant  $i_D$  est nul, les dérivées sont nulles. L'équation de l'inducteur se réduit à :

$$v_f = R_f i_f$$

### 11.1.5 Équations du stator

Reprenons les relations établies au paragraphe 10.4.2 :

$$v_d = R_s i_d + L_d \frac{di_d}{dt} + M_{fd} \frac{di_f}{dt} + M_{dD} \frac{di_D}{dt} - \psi_q \omega_e$$

$$v_q = R_s i_q + L_q \frac{di_q}{dt} + M_{qQ} \frac{di_Q}{dt} + \psi_d \omega_e$$

Comme les composantes homopolaires des tensions et des courants sont nulles en régime permanent, l'équation correspondante est sans objet.

Les dérivées sont nulles puisque les courants  $i_f$ ,  $i_d$  et  $i_q$  sont constants et les courants  $i_D$  et  $i_Q$  sont nuls. Par ailleurs, la vitesse électrique est égale à la pulsation statotique :

$$\begin{aligned}v_d &= R_s i_d - \omega_s L_q i_q \\v_q &= R_s i_q + \omega_s L_d i_d + \omega_s M_{fd} i_f\end{aligned}$$

On pose :

$$X_d = L_d \omega_s$$

$$X_q = L_q \omega_s$$

$X_d$  est appelé réactance synchrone longitudinale et  $X_q$  réactance synchrone transversale. Les équations précédentes s'écrivent ainsi :

$$\begin{aligned}v_d &= R_s i_d - X_q i_q \\v_q &= R_s i_q + X_d i_d + \omega_s M_{fd} i_f\end{aligned}$$

### 11.1.6 Passage aux grandeurs complexes d'espace

Choisissons  $O_d$  comme axe réel et  $O_q$  comme axe imaginaire du plan complexe et définissons les grandeurs complexes d'espace associées aux tensions et courants :

$$\begin{aligned}\underline{v} &= v_d + jv_q \\ \underline{i} &= i_d + ji_q\end{aligned}$$

Remplaçons  $v_d$  et  $v_q$  par leurs expressions dans la première de ces formules :

$$\underline{v} = R_s i_d - X_q i_q + j(R_s i_q + X_d i_d + \omega_s M_{fd} i_f)$$

soit :

$$\underline{v} = R_s (i_d + ji_q) + j^2 X_q i_q + jX_d i_d + j\omega_s M_{fd} i_f$$

ou encore :

$$\underline{v} = R_s \underline{i} + jX_q \underline{i} + j(X_d - X_q) i_d + j\omega_s M_{fd} i_f$$

### 11.1.7 Passage aux grandeurs complexes temporelles

Passons maintenant aux grandeurs complexes temporelles  $\underline{V}$  et  $\underline{I}$ . Comme le repère dq tourne à la vitesse  $\omega_s$ , nous avons :

$$\underline{v} = \underline{V}\sqrt{3}$$

$$\underline{i} = \underline{I}\sqrt{3}$$

Ces grandeurs complexes peuvent s'écrire sous leur forme cartésienne. Ainsi, pour le courant :

$$\underline{I} = I_d + jI_q$$

avec :

$$i_d = I_d\sqrt{3}$$

$$i_q = I_q\sqrt{3}$$

L'équation relative aux grandeurs complexes spatiales se transforme en équation relative aux grandeurs complexes temporelles :

$$\underline{V}\sqrt{3} = R_s \underline{I}\sqrt{3} + jX_q \underline{I}\sqrt{3} + j(X_d - X_q)I_d\sqrt{3} + j\omega_s M_{fd} i_f$$

Divisons les deux membres par  $\sqrt{3}$  :

$$\underline{V} = R_s \underline{I} + jX_q \underline{I} + j(X_d - X_q)I_d + \frac{j\omega_s M_{fd} i_f}{\sqrt{3}}$$

Le dernier terme du second membre est égal à la tension induite dans une phase statorique lorsque le courant est nul : on lui donne le nom de force électromotrice à vide  $\underline{E}_v$ . La formule devient :

$$\underline{V} = R_s \underline{I} + jX_q \underline{I} + j(X_d - X_q)I_d + \underline{E}_v$$

avec :

$$\underline{E}_v = \frac{j\omega_s M_{fd} i_f}{\sqrt{3}}$$

Dans les moteurs à rotor lisse, les réactances synchrones longitudinale et transversale sont égales. Posons :

$$X_d = X_q = X$$

$X$  est nommée simplement réactance synchrone.  
La formule de la tension se simplifie :

$$\underline{V} = R_s \underline{I} + jX \underline{I} + \underline{E}_v$$

Il est également fait usage de l'inductance  $L$  correspondant à la réactance synchrone  $X$  :

$$X = L \omega_s$$

## 11.2 Diagrammes vectoriels

### 11.2.1 Diagramme de Behn-Eschenburg

Le diagramme de Behn-Eschenburg concerne les moteurs à entrefer constant (*figure 11.1*). C'est la représentation graphique de la relation :

$$\underline{V} = R_s \underline{I} + jX \underline{I} + \underline{E}_v$$

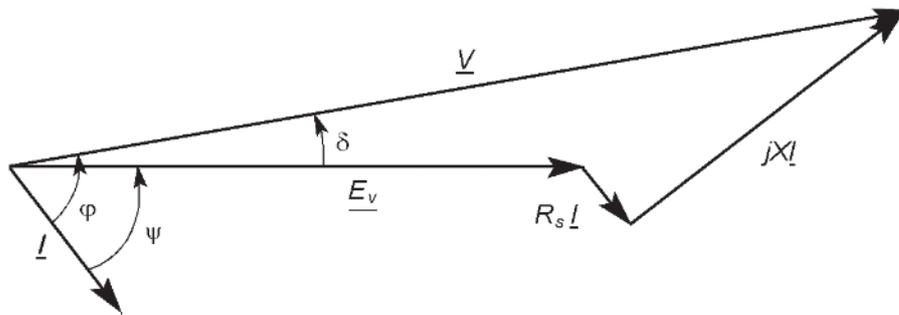


Figure 11.1 – Diagramme de Behn-Eschenburg.

Un schéma monophasé équivalent peut également être représenté (*figure 11.2*).

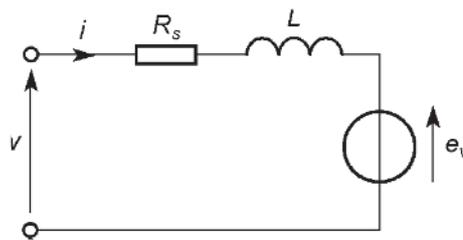


Figure 11.2 – Schéma monophasé équivalent.

Remarquons que dans le tracé du diagramme, nous avons exagéré l'importance de la chute de tension dans la résistance  $R_s$  pour permettre une bonne lisibilité. Quand on respecte les échelles avec les ordres de grandeur habituels, le vecteur correspondant à la chute de tension résistive est peu visible. Cela justifie la simplification souvent opérée qui consiste à négliger l'influence de la chute de tension dans la résistance  $R_s$  (*figure 11.3*). Le schéma monophasé équivalent est alors allégé en conséquence (*figure 11.4*). L'approximation faite est bonne pour les petits moteurs où le

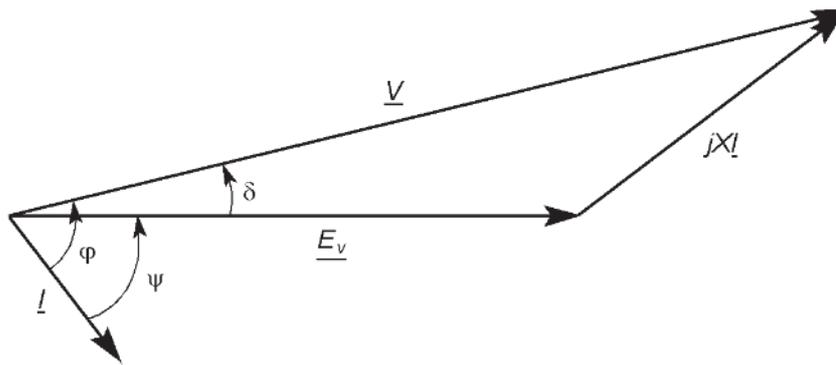


Figure 11.3 – Diagramme de Behn-Eschenburg simplifié.

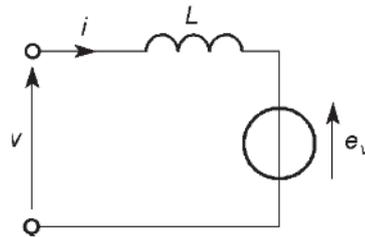


Figure 11.4 – Schéma monophasé équivalent simplifié.

rapport de la chute de tension résistive à la tension aux bornes vaut quelques pour cent, et elle est excellente pour les machines de moyenne ou forte puissance pour lesquelles ce même rapport tombe à quelques fractions de pour cent.

### 11.2.2 Diagramme de Blondel

Le diagramme de Blondel concerne les moteurs à pôles saillants (figure 11.5). C'est la représentation graphique de la relation :

$$\underline{V} = R_s \underline{I} + jX_q \underline{I} + j(X_d - X_q) I_d + \underline{E}_v$$

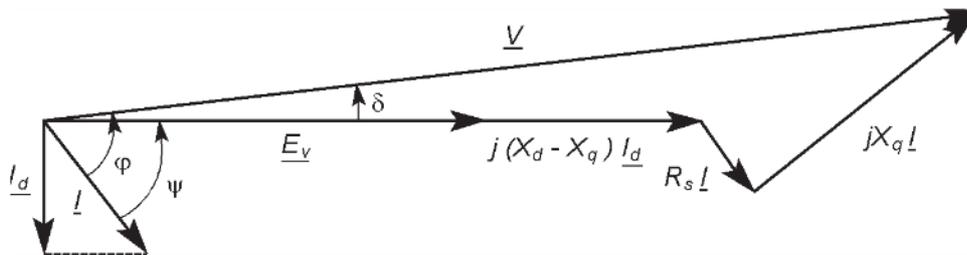


Figure 11.5 – Diagramme de Blondel.

Comme précédemment, compte tenu des ordres de grandeur, il est souvent possible de négliger l'influence de la chute de tension dans la résistance  $R_s$  (figure 11.6).

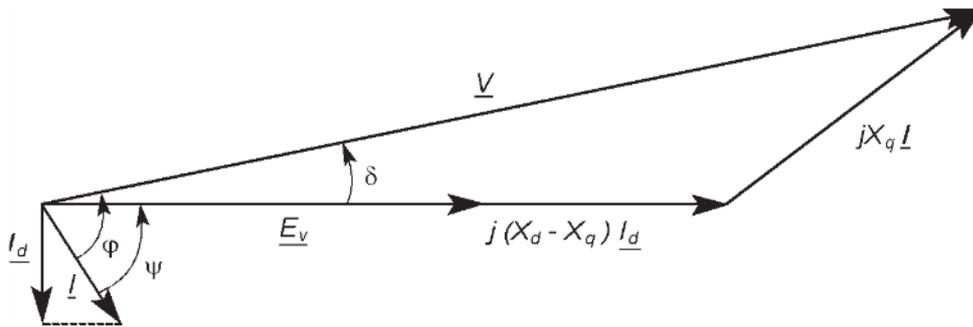


Figure 11.6 – Diagramme de Blondel simplifié.

## 11.3 Puissances et rendement

### 11.3.1 Bilan des puissances actives

La puissance active appelée par le moteur au réseau est :

$$P = 3VI \cos \varphi$$

Le stator est le siège de pertes ferromagnétiques  $p_{fs}$  et de pertes par effet Joule  $p_{js}$  :

$$p_{js} = 3R_s I^2$$

La puissance reçue par le circuit inducteur de son alimentation continue est :

$$P_e = v_f i_f$$

Le rotor est le siège de pertes ferromagnétiques  $p_{fr}$  et de pertes par effet Joule  $p_{jr}$  dans le circuit d'excitation :

$$p_{jr} = R_f i_f^2$$

Cette dernière puissance est égale à la puissance  $P_e$  reçue par le circuit inducteur. Pour obtenir la puissance utile  $P_u$ , c'est-à-dire celle qui est utilisable par la charge entraînée, il reste à retrancher les pertes mécaniques  $p_m$  (frottements, ventilation, balais) :

$$P_u = P_m - p_m$$

Ce bilan permet de tracer le diagramme des puissances (figure 11.7).

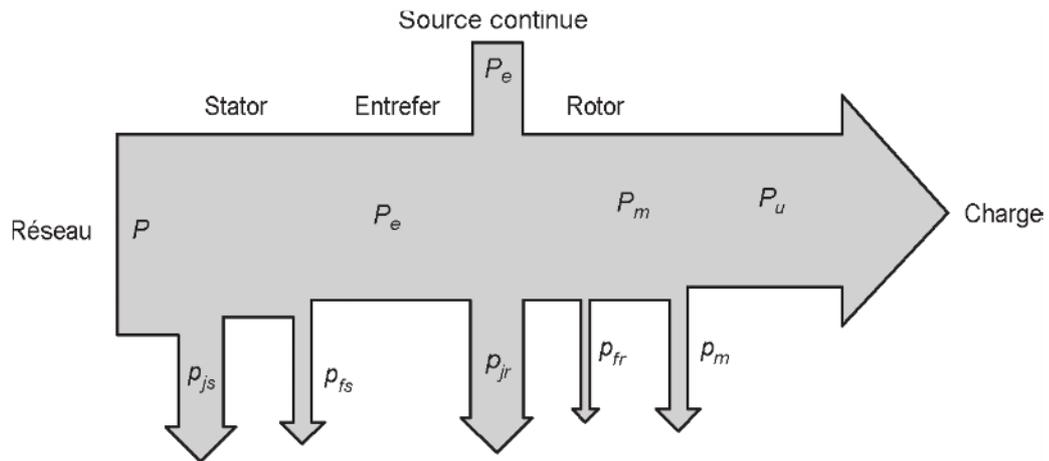


Figure 11.7 – Diagramme des puissances.

### 11.3.2 Rendement

Le rendement est défini le rapport de la puissance utile à la puissance électrique totale fournie au moteur :

$$\eta = \frac{P_u}{P + P_e}$$

## 11.4 Couple

### 11.4.1 Expressions obtenues à partir de la formule générale

#### ■ Moteur à entrefer constant

Reprenons l'expression du moment du couple électromagnétique :

$$\gamma = p M_{fd} i_f i_q + p (M_{dD} i_D i_q - M_{qQ} i_Q i_d)$$

En régime permanent, le deuxième terme de la somme disparaît puisqu'il n'y a aucun courant dans les amortisseurs. Introduisons par ailleurs la valeur efficace  $E_v$  de la force électromotrice à vide :

$$E_v = \frac{\omega_s M_{fd} i_f}{\sqrt{3}}$$

en écrivant :

$$M_{fd} i_f = \frac{\sqrt{3} E_v}{\omega_s}$$

ou, en faisant apparaître la vitesse de rotation  $\omega_m$  :

$$M_{fd} i_f = \frac{\sqrt{3} E_v}{p \omega_m}$$

Introduisons également la partie imaginaire  $I_q$  du courant statorique en utilisant la formule :

$$i_q = I_q \sqrt{3}$$

L'expression du moment du couple électromagnétique devient :

$$\gamma = \frac{3}{\omega_m} E_v I_q$$

#### ■ Moteur à pôles saillants

Reprenons l'expression du moment du couple électromagnétique :

$$\gamma = p M_{fd} i_f i_q + p (L_d - L_q) i_d i_q + p (M_{dD} i_D i_q - M_{qQ} i_Q i_d)$$

En régime permanent, le troisième terme de la somme disparaît puisqu'il n'y a aucun courant dans les amortisseurs. Le premier terme est celui que nous venons de transformer dans le cas du moteur à entrefer constant. Dans le deuxième terme, introduisons la partie réelle  $I_d$  et la partie imaginaire  $I_q$  du courant statorique en utilisant les formules :

$$i_d = I_d \sqrt{3}$$

$$i_q = I_q \sqrt{3}$$

L'expression du moment du couple électromagnétique devient :

$$\gamma = \frac{3}{\omega_m} E_v I_q + 3p (L_d - L_q) I_d I_q$$

Introduisons les réactances synchrones :

$$\gamma = \frac{3}{\omega_m} [E_v + (X_d - X_q) I_d] I_q$$

#### 11.4.2 Expressions obtenues à partir de la puissance

La résistance statorique est négligée.

#### ■ Moteur à entrefer constant

La puissance électrique appelée par le stator est :

$$P = 3 V I \cos \varphi$$

Considérons le diagramme de Behn-Eschenburg simplifié. Projétons les vecteurs représentant  $\underline{E}_v$  et  $jXI$  sur un axe ( $\Delta$ ) perpendiculaire au vecteur représentant  $\underline{V}$  (figure 11.8) :

$$XI \cos \varphi = E_v \sin \delta$$

soit :

$$I \cos \varphi = \frac{E_v \sin \delta}{X}$$

Tenons compte de cette relation dans l'expression de la puissance :

$$P = 3 \frac{VE_v}{X} \sin \delta$$

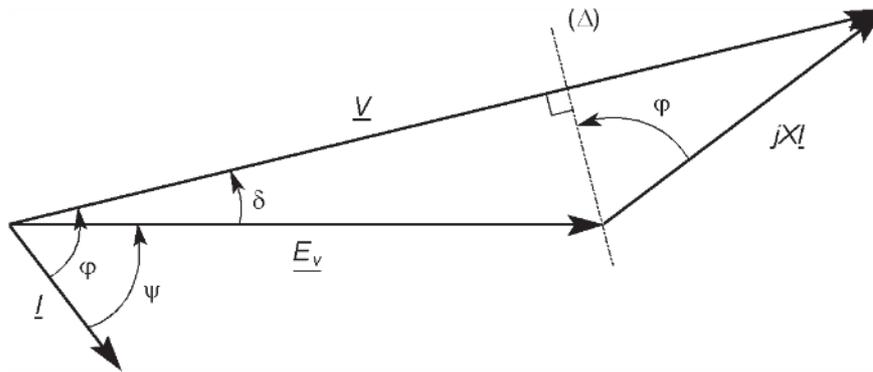


Figure 11.8 – Diagramme de Behn-Eschenburg simplifié.

Comme la résistance est négligée, le couple électromagnétique est simplement :

$$\gamma = \frac{P}{\omega_m}$$

soit :

$$\gamma = 3 \frac{VE_v}{X\omega_m} \sin \delta$$

Pour un moteur à rotor lisse alimenté par le réseau à amplitude et fréquence constantes et dont l'inducteur est parcouru par un courant constant, le moment du couple électromagnétique varie comme le sinus de l'angle interne  $\delta$  (figure 11.9).

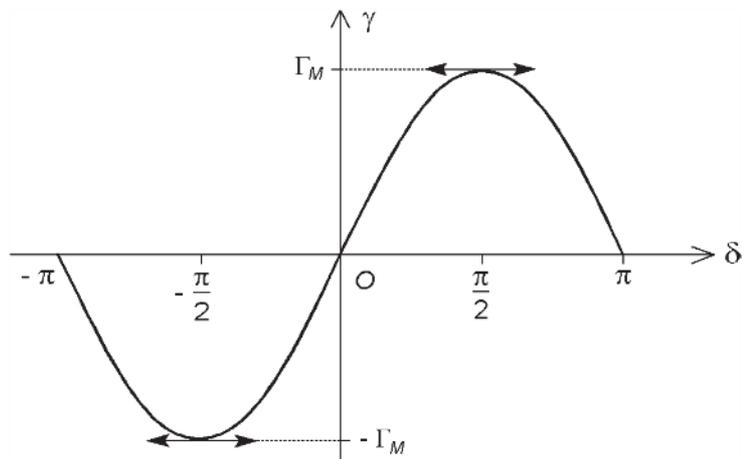


Figure 11.9 – Courbe du moment du couple électromagnétique en fonction de l'angle interne pour moteur à rotor lisse.

■ Moteur à pôles saillants

La puissance électrique appelée par le stator est toujours :

$$P = 3VI \cos \varphi$$

Considérons le diagramme de Blondel simplifié. Projets les vecteurs représentant  $\underline{V}$  et  $jX_q \underline{I}$  sur un axe  $(\Delta_1)$  perpendiculaire au vecteur représentant  $\underline{E}_v$  (figure 11.10) :

$$V \sin \delta = X_q I \cos \psi$$

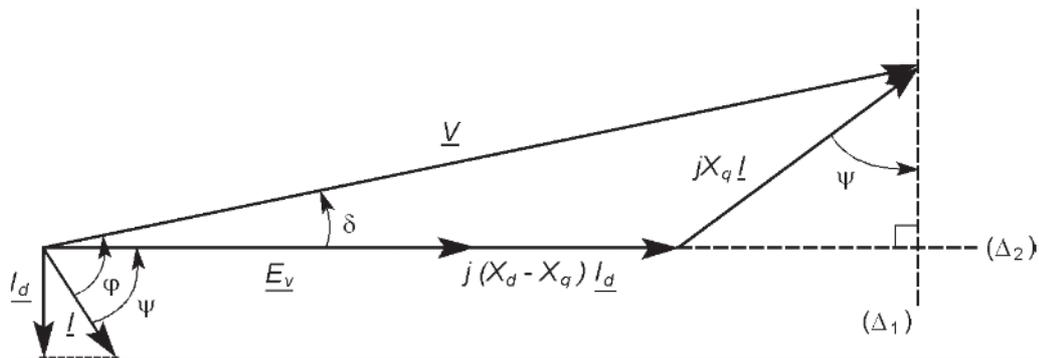


Figure 11.10 – Diagramme de Blondel simplifié.

Nous en déduisons :

$$\cos \psi = \frac{V \sin \delta}{X_q I}$$

Projetons ensuite les vecteurs représentant  $\underline{V}$  et  $jX_q\underline{I}$  sur un axe ( $\Delta_2$ ) portant le vecteur représentant  $\underline{E}_v$  :

$$V \cos \delta = E_v + (X_d - X_q)I_d + X_q I \sin \psi$$

Remarquons que :

$$I_d = I \sin \psi$$

ce qui conduit à :

$$V \cos \delta = E_v + X_d I \sin \psi$$

Nous en déduisons :

$$\sin \psi = \frac{V \cos \delta - E_v}{X_d I}$$

Les trois angles  $\varphi$ ,  $\psi$  et  $\delta$  sont liés par :

$$\varphi = \psi + \delta$$

Appliquons la formule trigonométrique donnant le cosinus d'une somme :

$$\cos \varphi = \cos \psi \cos \delta - \sin \psi \sin \delta$$

et remplaçons  $\cos \psi$  et  $\sin \psi$  par leurs expressions précédentes :

$$\cos \varphi = \frac{V \sin \delta}{X_q I} \cos \delta - \frac{V \cos \delta - E_v}{X_d I} \sin \delta$$

Nous en déduisons :

$$I \cos \varphi = \frac{E_v \sin \delta}{X_d} + \left( \frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d} \right) V \cos \delta \sin \delta$$

Tenons compte de la formule trigonométrique :

$$\sin 2\delta = 2 \cos \delta \sin \delta$$

Nous obtenons :

$$I \cos \varphi = \frac{E_v \sin \delta}{X_d} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d} \right) V \sin 2\delta$$

La puissance s'exprime alors par :

$$P = 3 \frac{VE_v}{X_d} \sin \delta + \frac{3}{2} V^2 \left( \frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d} \right) \sin 2\delta$$

Comme la résistance est négligée, le couple électromagnétique est simplement :

$$\gamma = \frac{P}{\omega_m}$$

soit :

$$\gamma = 3 \frac{VE_v}{X_d \omega_m} \sin \delta + \frac{3}{2} \frac{V^2}{\omega_m} \left( \frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d} \right) \sin 2\delta$$

Ce couple électromagnétique est composé de deux termes :

– le couple principal dû à l'interaction des champs du stator et du rotor :

$$\gamma_p = 3 \frac{VE_v}{X_d \omega_m} \sin \delta$$

– le couple réactant dû à la saillance du rotor :

$$\gamma_r = \frac{3}{2} \frac{V^2}{\omega_m} \left( \frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d} \right) \sin 2\delta$$

Pour un moteur à pôles saillants alimenté par le réseau à amplitude et fréquence constantes et dont l'inducteur est parcouru par un courant constant, la courbe du moment du couple électromagnétique en fonction de l'angle interne  $\delta$  est la somme de deux sinusoides (*figure 11.11*).

Le moment du couple électromagnétique est maximal pour un angle  $\delta_0$  un peu inférieur à  $\frac{\pi}{2}$  que nous pouvons déterminer en annulant la dérivée  $\frac{d\gamma}{d\delta}$ , ce qui donne :

$$3 \frac{VE_v}{X_d \omega_m} \cos \delta + 3 \frac{V^2}{\omega_m} \left( \frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d} \right) \cos 2\delta = 0$$

Tenons compte de la formule trigonométrique :

$$\cos 2\delta = 2 \cos^2 \delta - 1$$

Nous obtenons ainsi :

$$\frac{VE_v}{X_d \omega_m} \cos \delta + 2 \frac{V^2}{\omega_m} \left( \frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d} \right) \cos^2 \delta - \frac{V^2}{\omega_m} \left( \frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d} \right) = 0$$

Cette équation est un trinôme du second degré pour  $\cos \delta$  que nous pouvons écrire :

$$\cos^2 \delta + \frac{1}{2} \frac{X_q}{X_d - X_q} \frac{E_v}{V} \cos \delta - \frac{1}{2} = 0$$

Le discriminant est toujours positif :

$$\Delta = \frac{1}{4} \left( \frac{X_q}{X_d - X_q} \frac{E_v}{V} \right)^2 + 2$$

Seule la racine positive est à retenir puisque  $\delta_0$  est compris entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$  :

$$\cos \delta_0 = -\frac{1}{4} \frac{X_q}{X_d - X_q} \frac{E_v}{V} + \sqrt{\frac{1}{16} \left( \frac{X_q}{X_d - X_q} \frac{E_v}{V} \right)^2 + \frac{1}{2}}$$

L'angle  $\delta_0$  est finalement :

$$\delta_0 = \text{Arccos} \left[ -\frac{1}{4} \frac{X_q}{X_d - X_q} \frac{E_v}{V} + \sqrt{\frac{1}{16} \left( \frac{X_q}{X_d - X_q} \frac{E_v}{V} \right)^2 + \frac{1}{2}} \right]$$

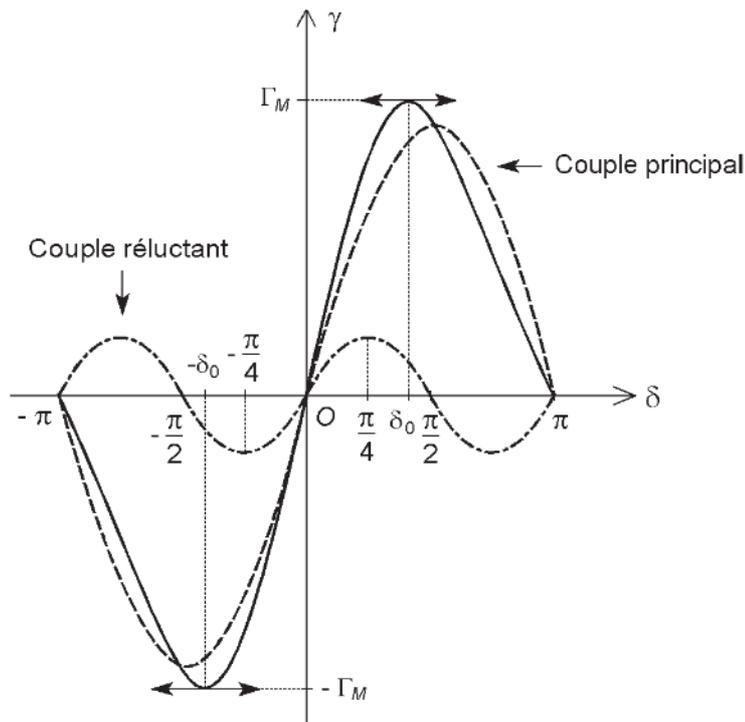


Figure 11.11 – Courbe du moment du couple électromagnétique en fonction de l'angle interne pour moteur à pôles saillants.

■ **Puissance réactive**

□ **Moteur à entrefer constant**

La puissance réactive appelée par le moteur est :

$$Q = 3 VI \sin \varphi$$

Considérons le diagramme de Behn-Eschenburg simplifié. Projetons les vecteurs représentant  $\underline{E}_v$  et  $jX\underline{I}$  sur un axe ( $\Delta$ ) portant le vecteur représentant  $\underline{V}$  (figure 11.12) :

$$V = E_v \cos \delta + XI \sin \varphi$$

soit :

$$I \sin \varphi = \frac{V - E_v \cos \delta}{X}$$

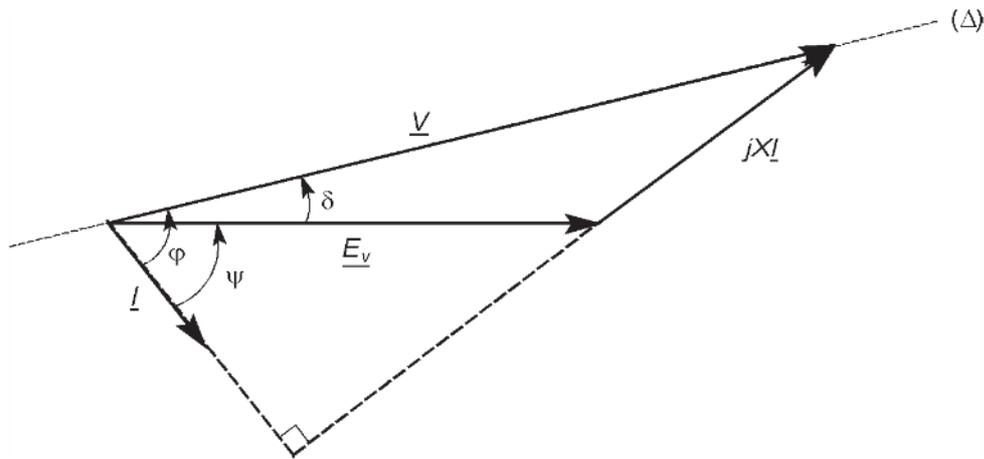


Figure 11.12 – Diagramme de Behn-Eschenburg simplifié.

La puissance réactive s'exprime alors par :

$$Q = \frac{3V^2}{X} - \frac{3VE_v}{X} \cos \delta$$

□ **Moteur à pôles saillants**

Les trois angles  $\varphi$ ,  $\psi$  et  $\delta$  sont liés par :

$$\varphi = \psi + \delta$$

Appliquons la formule trigonométrique donnant le sinus d'une somme :

$$\sin \varphi = \sin \psi \cos \delta + \cos \psi \sin \delta$$

et remplaçons  $\cos \psi$  et  $\sin \psi$  par leurs expressions précédentes :

$$\sin \varphi = \frac{V \cos \delta - E_v}{X_d I} \cos \delta + \frac{V \sin \delta}{X_q I} \sin \delta$$

Nous en déduisons :

$$I \sin \varphi = \frac{-E_v}{X_d} \cos \delta + \frac{V}{X_d} \cos^2 \delta + \frac{V}{X_q} \sin^2 \delta$$

Tenons compte des formules trigonométriques :

$$\cos^2 \delta = \frac{1 + \cos 2\delta}{2}$$

$$\sin^2 \delta = \frac{1 - \cos 2\delta}{2}$$

Nous obtenons ainsi :

$$I \sin \varphi = \frac{-E_v}{X_d} \cos \delta + \frac{V}{X_d} \frac{1 + \cos 2\delta}{2} + \frac{V}{X_q} \frac{1 - \cos 2\delta}{2}$$

soit :

$$I \sin \varphi = \frac{-E_v}{X_d} \cos \delta + \frac{V}{2} \left( \frac{1}{X_d} - \frac{1}{X_q} \right) \cos 2\delta + \frac{V}{2} \left( \frac{1}{X_d} + \frac{1}{X_q} \right)$$

La puissance réactive s'exprime alors par :

$$Q = \frac{-3VE_v}{X_d} \cos \delta + \frac{3V^2}{2} \left( \frac{1}{X_d} - \frac{1}{X_q} \right) \cos 2\delta + \frac{3V^2}{2} \left( \frac{1}{X_d} + \frac{1}{X_q} \right)$$

Copyright © 2005 Dunod. Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite à l'exception des cas prévus aux termes de l'article L.122-5, 2° et 3° a) du Code de la Propriété Intellectuelle.

## 12 • MISE EN ŒUVRE DES MOTEURS SYNCHRONES

---

### 12.1 Moteur synchrone alimenté à fréquence fixe

#### 12.1.1 Démarrage

L'expression du moment du couple électromagnétique d'un moteur synchrone montre que sa valeur moyenne est nulle sauf si les vitesses des champs tournants du stator et du rotor sont identiques, ce qui n'est pas le cas quand la machine à l'arrêt est branchée sur le réseau. Le démarrage spontané d'un moteur synchrone alimenté à fréquence fixe n'est pas possible sans artifice.

Pour assurer néanmoins le démarrage du moteur synchrone, il faut soit l'entraîner par un moteur auxiliaire, soit le démarrer comme un moteur asynchrone.

#### ■ Emploi d'un moteur auxiliaire

Un moteur asynchrone auxiliaire entraîne le moteur synchrone jusqu'à ce que la vitesse de rotation permette le synchronisme des champs tournants du stator et du rotor. Pour que ce moteur auxiliaire soit de faible puissance, le démarrage se fait avec le moteur synchrone à vide. Si le moteur asynchrone auxiliaire a le même nombre de pôles que le moteur synchrone, il amène la vitesse à une valeur légèrement inférieure à la vitesse synchrone à condition que le glissement ne soit pas excessif. Le moteur synchrone est alors branché sur le réseau et il se synchronise. Le plus souvent, le glissement est trop important pour procéder de la sorte car la puissance du moteur auxiliaire est très inférieure à celle du moteur synchrone et le glissement est important. Il faut alors choisir une machine asynchrone ayant une paire de pôles de moins que le moteur synchrone. Le moteur de lancement amène la vitesse à une valeur supérieure à la vitesse de synchronisme. Il est ensuite débranché. Le moteur synchrone ralentit et il faut le relier au réseau lorsque sa vitesse passe par le synchronisme.

#### ■ Démarrage en moteur asynchrone

Le moteur synchrone est branché directement sur le réseau, l'inducteur n'étant pas alimenté. Il démarre comme un moteur asynchrone grâce aux courants induits dans les amortisseurs et l'inducteur.

□ **Méthode d'étude**

Lors de l'étude du régime transitoire de démarrage, une étude particulière est nécessaire puisque la vitesse de rotation n'est pas égale à la vitesse de synchronisme. Cependant, l'inertie des parties tournantes fait que la vitesse varie suffisamment lentement pour qu'on puisse la considérer comme stationnaire. Le régime transitoire est considéré comme une succession de régimes permanents. La solution des équations de Park en régime permanent peut ainsi être obtenue par la méthode des grandeurs complexes. Nous allons établir l'expression du moment du couple électromagnétique en fonction de la vitesse ou du glissement et tracer la courbe correspondante.

□ **Expression des composantes de Park de la tension**

Les tensions appliquées aux trois phases forment un système triphasé équilibré :

$$v_a = V_M \cos \omega_s t$$

$$v_b = V_M \cos \left( \omega_s t - \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$v_c = V_M \cos \left( \omega_s t + \frac{2\pi}{3} \right)$$

Nous sommes en régime permanent et les relations établies au paragraphe 6.2.4 nous donnent les expressions des composantes directe  $v_d$ , en quadrature  $v_q$  et homopolaire  $v_h$  :

$$v_d = \sqrt{\frac{3}{2}} V_M \cos(\omega_s t - \theta_e)$$

$$v_q = \sqrt{\frac{3}{2}} V_M \sin(\omega_s t - \theta_e)$$

$$v_h = 0$$

Appliquons la transformation de Park avec un repère dq solidaire du rotor. L'angle électrique  $\theta_e$  définissant la position du rotor s'exprime en fonction du temps avec la vitesse électrique  $\omega_e$  et la valeur initiale  $\theta_0$  :

$$\theta_e = \omega_e t + \theta_0$$

Or, en fonctionnement asynchrone, la vitesse électrique s'exprime en fonction du glissement  $g$  et la pulsation statorique  $\omega_s$  :

$$\omega_e = (1 - g)\omega_s$$

L'angle  $\theta_e$  s'écrit donc :

$$\theta_e = (1 - g)\omega_s t + \theta_0$$

En introduisant l'expression de  $\theta_e$  en fonction de  $t$  dans les formules des composantes, nous arrivons à :

$$v_d = \sqrt{\frac{3}{2}} V_M \cos(g\omega_s t - \theta_0)$$

$$v_q = \sqrt{\frac{3}{2}} V_M \sin(g\omega_s t - \theta_0)$$

Les composantes directe et en quadrature de la tension sont donc des fonctions sinusoïdales de pulsation  $g\omega_s$ .

#### □ Équations de Park en grandeurs complexes

Comme les tensions, les courants et les flux du stator sont liés par des équations différentielles linéaires, toutes ces grandeurs sont des fonctions sinusoïdales de pulsation  $g\omega_s$  en régime permanent. Comme par ailleurs les grandeurs rotoriques sont aussi des fonctions sinusoïdales de pulsation  $g\omega_s$ , nous pouvons écrire l'ensemble des équations de Park en grandeurs complexes. Nous avons tenu compte du fait que l'inducteur est refermé sur une résistance : la tension appliquée  $v_f$  est nulle et la résistance totale  $R$  du circuit inducteur est la somme de la résistance  $R_f$  de l'enroulement du moteur et de la résistance ajoutée :

$$\underline{V}_d = R_s \underline{I}_d + jg\omega_s \underline{\Psi}_d - (1-g)\omega_s \underline{\Psi}_q \quad (1)$$

$$\underline{V}_q = R_s \underline{I}_q + jg\omega_s \underline{\Psi}_q + (1-g)\omega_s \underline{\Psi}_d \quad (2)$$

$$0 = R_D \underline{I}_D + jg\omega_s \underline{\Psi}_D \quad (3)$$

$$0 = R \underline{I}_f + jg\omega_s \underline{\Psi}_f \quad (4)$$

$$0 = R_Q \underline{I}_Q + jg\omega_s \underline{\Psi}_Q \quad (5)$$

#### □ Relations entre flux et courants

Écrivons les relations entre flux et courants avec les grandeurs complexes :

$$\underline{\Psi}_d = L_d \underline{I}_d + M_{fd} \underline{I}_f + M_{dD} \underline{I}_D \quad (6)$$

$$\underline{\Psi}_q = L_q \underline{I}_q + M_{qQ} \underline{I}_Q \quad (7)$$

$$\underline{\Psi}_f = L_f \underline{I}_f + M_{fd} \underline{I}_d + M_{fD} \underline{I}_D \quad (8)$$

$$\underline{\Psi}_D = L_D \underline{I}_D + M_{fD} \underline{I}_f + M_{dD} \underline{I}_d \quad (9)$$

$$\underline{\Psi}_Q = L_Q \underline{I}_Q + M_{qQ} \underline{I}_q \quad (10)$$

L'association des relations (8) et (4) permet d'éliminer  $\underline{\Psi}_f$  :

$$0 = \left( \frac{R}{g\omega_s} + L_f \right) \underline{I}_f + M_{fd} \underline{I}_d + M_{fD} \underline{I}_D \quad (11)$$

L'association des relations (9) et (3) permet d'éliminer  $\underline{\Psi}_D$  :

$$0 = \left( \frac{R_D}{g\omega_s} + L_D \right) \underline{I}_D + M_{fD} \underline{I}_f + M_{dD} \underline{I}_d \quad (12)$$

Enfin, l'association des relations (10) et (5) permet d'éliminer  $\underline{\Psi}_Q$  :

$$0 = \left( \frac{R_Q}{g\omega_s} + L_Q \right) \underline{I}_Q + M_{qQ} \underline{I}_q \quad (13)$$

Il est possible ensuite d'exprimer  $\underline{I}_d$  à partir des équations (6), (11) et (12).

La solution de ce système linéaire de trois équations à trois inconnues peut s'écrire avec les déterminants :

$$\underline{I}_d = \frac{\begin{vmatrix} \underline{\Psi}_d & M_{fd} & M_{dD} \\ 0 & \frac{R}{g\omega_s} + L_f & M_{fD} \\ 0 & M_{fD} & \frac{R_D}{g\omega_s} + L_D \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} L_d & M_{fd} & M_{dD} \\ M_{fd} & \frac{R}{g\omega_s} + L_f & M_{fD} \\ M_{dD} & M_{fD} & \frac{R_D}{g\omega_s} + L_D \end{vmatrix}}$$

Le résultat est de la forme :

$$\underline{\Psi}_d = \underline{L}_d \underline{I}_d$$

avec :

$$\underline{L}_d = L_d \frac{(1 + j\tau'_d g\omega_s)(1 + j\tau''_d g\omega_s)}{(1 + j\tau'_{d0} g\omega_s)(1 + j\tau''_{d0} g\omega_s)}$$

$\underline{L}_d$  est l'inductance complexe longitudinale,  $\tau'_d$  est la constante de temps transitoire longitudinale en court-circuit,  $\tau''_d$  est la constante de temps subtransitoire longitu-

dinale en court-circuit,  $\tau'_d$  est la constante de temps transitoire longitudinale en circuit ouvert,  $\tau''_{d0}$  est la constante de temps subtransitoire longitudinale en circuit ouvert.

De la même façon, les équations (7) et (13) forment un système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{aligned} L_q \underline{I}_q + M_{qQ} \underline{I}_Q &= \underline{\Psi}_q \\ M_{qQ} \underline{I}_q + \left( \frac{R_Q}{g\omega_s} + L_Q \right) \underline{I}_Q &= 0 \end{aligned}$$

En utilisant les déterminants, la solution est :

$$\underline{I}_q = \frac{\begin{vmatrix} \underline{\Psi}_q & M_{qQ} \\ 0 & \frac{R_Q}{g\omega_s} + L_Q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} L_q & M_{qQ} \\ M_{qQ} & \frac{R_Q}{g\omega_s} + L_Q \end{vmatrix}}$$

soit :

$$\underline{I}_q = \frac{\frac{R_Q}{g\omega_s} + L_Q}{L_q \left( \frac{R_Q}{g\omega_s} + L_Q \right) - M_{qQ}^2}$$

ou encore :

$$\underline{\Psi}_q = L_q \frac{R_Q + \left( L_Q - \frac{M_{qQ}^2}{L_q} \right) g\omega_s}{R_Q + L_Q g\omega_s} \underline{I}_q$$

Le résultat est de la forme :

$$\underline{\Psi}_d = \underline{L}_q \underline{I}_q$$

avec :

$$\underline{L}_q = L_q \frac{1 + j\tau_q'' g\omega_s}{1 + j\tau_{q0}'' g\omega_s}$$

$\underline{L}_q$  est l'inductance complexe d'axe direct,  $\tau_q''$  est la constante de temps subtransitoire transversale en court-circuit et  $\tau_{q0}''$  constante de temps subtransitoire transversale en circuit ouvert.

#### □ Moment du couple électromagnétique

Le moment du couple instantané est :

$$\gamma = p(\Psi_d i_q - \Psi_q i_d)$$

Sa valeur moyenne peut s'exprimer avec les grandeurs complexes (c'est le même passage qu'entre puissance instantanée, puissance complexe puis puissance moyenne) :

$$\Gamma_{\text{moy}} = p \operatorname{Re}(\underline{\Psi}_d^* \underline{I}_q - \underline{\Psi}_q^* \underline{I}_d)$$

En utilisant les diverses relations précédentes, on arrive à une expression assez compliquée pour le moment du couple qui permet de tracer la courbe de ses variations en fonction du glissement (*figure 12.1*).

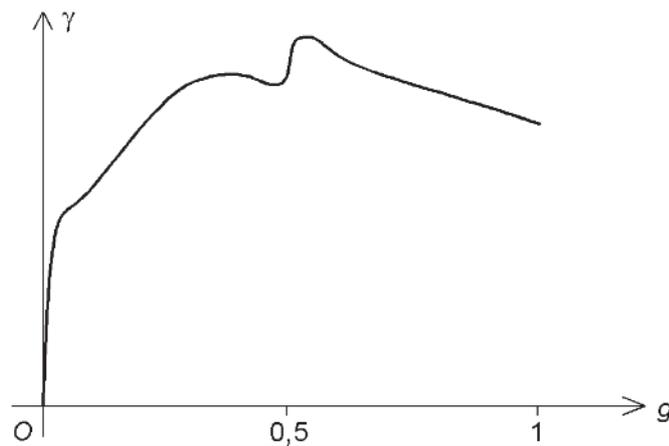


Figure 12.1 – Couple asynchrone d'un moteur synchrone.

La courbe présente une variation brusque au voisinage de  $g = 0,5$  due à la dissymétrie du rotor de la machine : c'est le phénomène de Görges.

#### 12.1.2 Accrochage

Quand un moteur synchrone termine son démarrage en asynchrone, un régime transitoire d'accrochage permet d'atteindre le fonctionnement permanent. Considérons le cas d'un moteur à entrefer constant à  $p$  paires de pôles alimenté par des tensions de pulsation  $\omega_s$ . Le champ tournant se déplace à la vitesse angulaire  $\frac{\omega_s}{p}$ . La position

angulaire de son axe est  $\frac{\omega_s}{p}t$  en prenant comme origine des angles la position à  $t = 0$ .

Si  $\delta$  est l'angle interne, la position angulaire du rotor est alors :

$$\theta = \frac{\omega_s}{p}t - \frac{\delta}{p}$$

La vitesse de rotation est :

$$\omega_m = \frac{\omega_s}{p} - \frac{1}{p} \frac{d\delta}{dt}$$

Le glissement est ainsi :

$$g = \frac{1}{\omega_s} \frac{d\delta}{dt}$$

Faisons le bilan des couples appliqués au rotor. Nous avons :

– le couple synchrone dont le moment  $\gamma$  est de la forme :

$$\gamma = \Gamma_M \sin \delta$$

– le couple asynchrone dont le moment  $\gamma_a$  est proportionnel au glissement puisque ce dernier est faible :

$$\gamma_a = k \frac{d\delta}{dt}$$

– le couple résistant dont le moment  $\gamma_r$  est supposé constant pendant la durée du régime transitoire.

Appliquons le principe fondamental de la dynamique au rotor de moment d'inertie  $J$  :

$$J \frac{d\omega_m}{dt} = \gamma + \gamma_a - \gamma_r$$

Par ailleurs, l'accélération angulaire peut s'écrire :

$$\frac{d\omega_m}{dt} = -\frac{1}{p} \frac{d^2\delta}{dt^2}$$

Nous obtenons ainsi une équation différentielle du deuxième ordre :

$$-\frac{J}{p} \frac{d^2\delta}{dt^2} = \Gamma_M \sin \delta + k \frac{d\delta}{dt} - \gamma_r$$

Nous pouvons mettre cette équation sous sa forme classique :

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} + \frac{k_p}{J} \frac{d\delta}{dt} + \frac{\Gamma_{MP}}{J} \sin\delta = \frac{\gamma_r p}{J}$$

Il s'agit d'une équation différentielle non linéaire et nous ne pouvons pas en donner une solution sous forme littérale. Une résolution numérique permet néanmoins de tracer la courbe de  $\delta$  en fonction du temps (*figure 12.2*). La courbe présente une oscillation amortie autour de la valeur finale  $\delta_0$ .

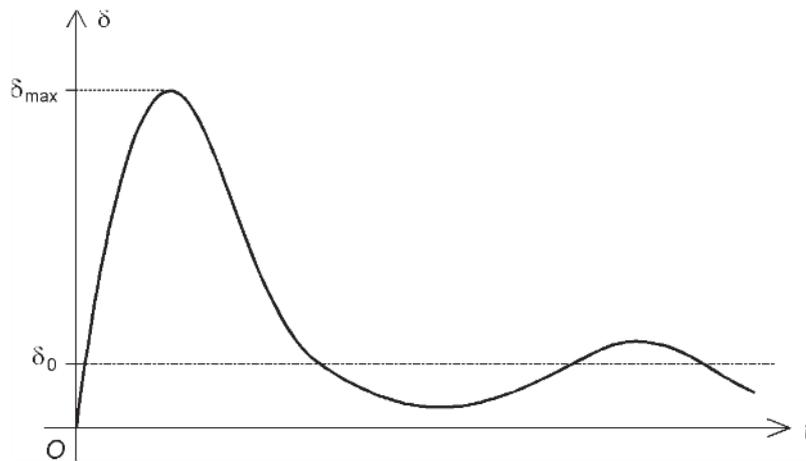


Figure 12.2 – Évolution de l'angle interne lors de l'accrochage.

## 12.2 Moteur synchrone alimenté à fréquence variable

Le moteur synchrone ne produit un couple qu'à la vitesse de synchronisme, proportionnelle à la pulsation des grandeurs du stator. La seule façon de faire varier sa vitesse de rotation est donc de régler la fréquence de l'alimentation de l'enroulement statorique.

### 12.2.1 Convertisseur de puissance

#### ■ Cycloconvertisseur

#### □ Principe

Dans certaines applications de forte puissance, on utilise un moteur synchrone à rotor bobiné dont l'enroulement statorique est alimenté par un cycloconvertisseur constitué de 36 thyristors (*figure 12.3*). Ce convertisseur électronique réalise une source de tensions triphasées réglables en fréquence et en amplitude.

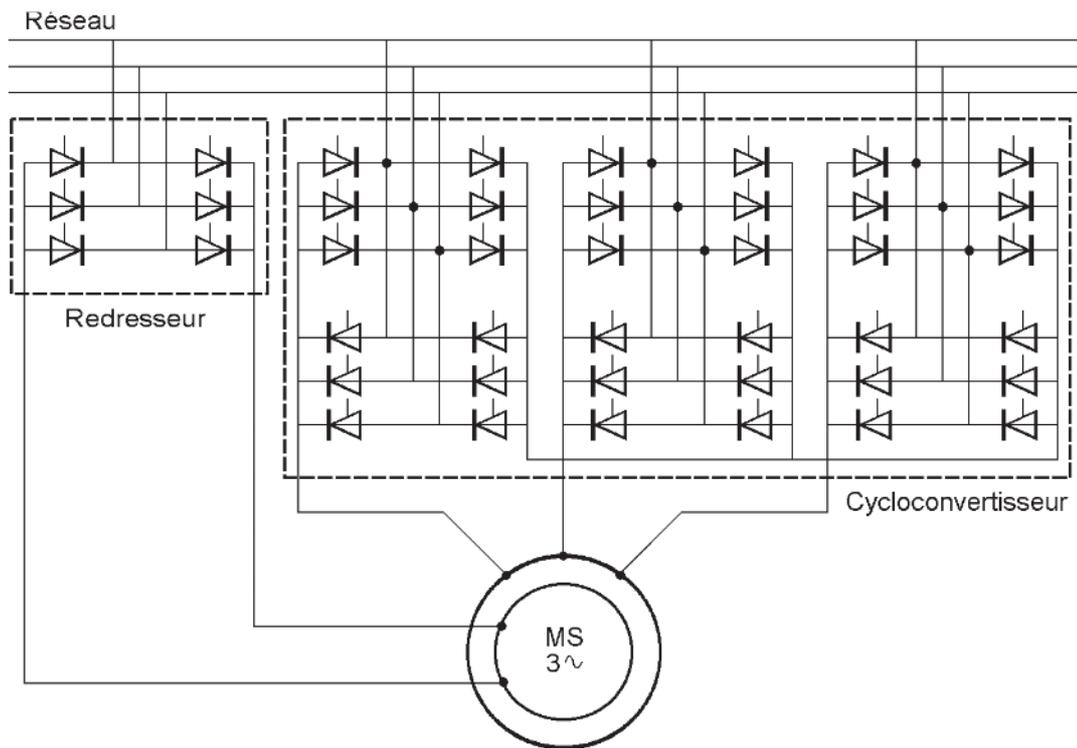


Figure 12.3 – Moteur synchrone alimenté par un cycloconvertisseur.

#### □ Avantages et inconvénients

Nous retrouvons les avantages et les inconvénients déjà évoqués pour les cycloconvertisseurs alimentant un moteur asynchrone. C'est principalement sa complexité liée au grand nombre de thyristors et surtout les faibles valeurs possibles pour la fréquence de la tension de sortie qui en limitent son utilisation. Le procédé n'est rencontré que pour des moteurs de forte puissance et à vitesse lente.

Comme exemples d'application, citons la propulsion électrique des navires brise-glace qui ont besoin de disposer d'un couple important à faible vitesse pour que l'hélice ne se bloque pas, l'entraînement des fours de cimenterie, de broyeurs ou encore les machines d'extraction de mines.

#### ■ Onduleur de tension

##### □ Principe

Pour les applications de puissance modeste, la solution souvent retenue est le moteur à aimants alimenté par un onduleur de tension utilisant des IGBT (*figure 12.4*). La commande de l'onduleur est en modulation de largeur d'impulsions (MLI), ce qui permet de faire varier la fréquence et l'amplitude tout en ne produisant que des harmoniques de rang élevé.

Le système est réversible. Quand la machine fonctionne en générateur, le courant s'inverse et l'énergie est renvoyée vers la source si celle-ci le permet. Ce fonctionnement est possible quand le moteur est alimenté à partir d'une batterie d'accumula-

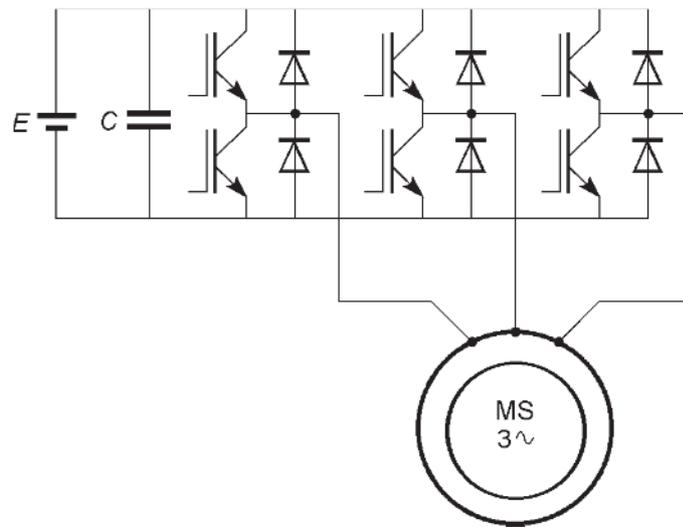


Figure 12.4 – Moteur synchrone alimenté par un onduleur de tension.

teurs. Celle-ci se décharge lors d'un fonctionnement en moteur et se recharge lors d'un fonctionnement en alternateur.

Pour alimenter le moteur à partir du réseau, il suffit de réaliser la source de tension continue par un redresseur à diodes et un filtre LC (figure 12.5). Ici, le fonctionnement en récupération est impossible car la source de tension n'est pas réversible. L'usage d'un redresseur à thyristors ne permet pas de résoudre le problème puisqu'il assure une réversibilité en tension, mais pas en courant. Toutefois, la récupération n'est pas indispensable pour les petits moteurs et un freinage rhéostatique est suffisant.

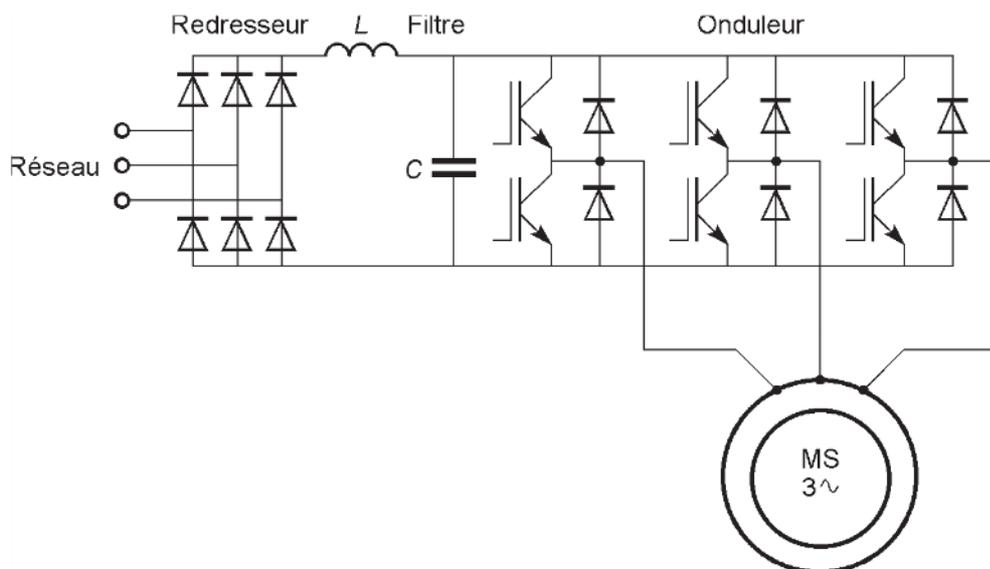


Figure 12.5 – Réalisation de la source de tension à partir du réseau.

### □ Avantages et inconvénients

Le moteur synchrone alimenté par un onduleur peut atteindre des vitesses élevées. L'onduleur de tension est une solution simple bien adaptée aux moteurs à aimants. Il convient particulièrement aux moteurs alimentés par une batterie grâce au fonctionnement en récupération qui permet d'économiser l'énergie.

### ■ Onduleur de courant

#### □ Principe

Pour les applications de forte puissance, c'est l'onduleur de courant qui s'impose pour alimenter un moteur à rotor bobiné. Un redresseur branché sur le réseau est suivi d'une bobine de lissage puis d'un onduleur formé de six thyristors (*figure 12.6*). Cette solution est utilisée systématiquement avec un autopilotage qui commande la conduction des thyristors de l'onduleur.

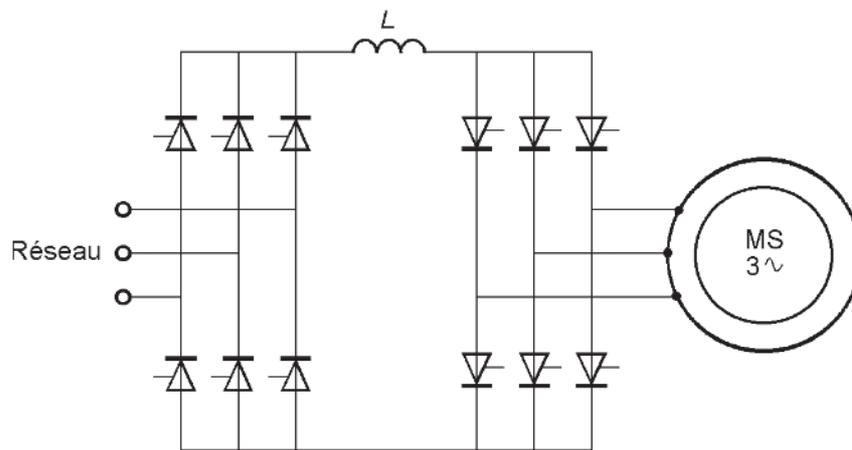


Figure 12.6 – Moteur synchrone alimenté par un onduleur de courant.

### □ Avantages et inconvénients

Le principal avantage de la structure est sa parfaite réversibilité. Le fonctionnement est possible dans les quatre quadrants. Le montage ne consomme que peu de puissance réactive, l'ondulation du couple est limitée. Cependant, pour assurer l'autopilotage, il est impossible d'imposer un déphasage nul entre la tension et la force électromotrice. La machine ne peut pas fournir son couple nominal et il en résulte un déclassement.

Cette solution a été utilisée en traction ferroviaire et présente toujours des avantages pour la propulsion navale.

### 12.2.2 Commande

#### ■ Autopilotage

Le moteur synchrone pose des problèmes de fonctionnement. Tout d'abord, il ne démarre pas spontanément sans artifice. Ensuite, il y a un risque de décrochage. En effet, le moment du couple n'a une valeur moyenne non nulle que si le rotor tourne parfaitement à la vitesse du champ tournant. Si ce synchronisme n'est pas respecté, le moment du couple a une valeur moyenne nulle et le moteur ralentit puis s'arrête. La machine se comporte alors presque comme un court-circuit puisqu'il n'y a plus de force électromotrice induite. Ce phénomène de décrochage peut se produire soit si le couple résistant devient excessif et que l'angle interne  $\delta$  dépasse la valeur  $\frac{\pi}{2}$ , soit lors d'un régime transitoire résultant d'une variation de fréquence destinée à modifier la vitesse ou d'un changement brutal de couple résistant. L'autopilotage permet de pallier ces défauts.

Un capteur détecte la position du rotor et commande le convertisseur électronique en fonction de cette position. La pulsation  $\omega_s$  de l'alimentation statorique est ainsi asservie à la vitesse  $\omega_m$  du rotor et le dispositif maintient toujours la condition :

$$\omega_s = p \omega_m$$

Le décrochage est alors impossible. L'autopilotage donne à l'ensemble convertisseur et moteur synchrone un fonctionnement proche de celui d'une machine à courant continu. L'inversion du sens de rotation est obtenue par un changement de l'ordre des commutations.

#### ■ Commande scalaire

Plusieurs stratégies de commande sont possibles selon le but recherché et suivant que l'alimentation est en tension ou en courant. Ce dernier cas peut être obtenu soit par un onduleur de courant, soit par un onduleur de tension muni d'une régulation de courant. C'est celui que nous considérons car c'est le plus fréquent.

#### □ Couple maximal

Pour exploiter au mieux les caractéristiques du moteur, il faut rendre le moment du couple maximal quand l'intensité efficace du courant est fixée. Pour un moteur à entrefer constant, nous avons montré au paragraphe 11.4.1 que le moment du couple électromagnétique est :

$$\gamma = \frac{3}{\omega_m} E_v I_q$$

soit :

$$\gamma = \frac{3}{\omega_m} E_v I \cos \psi$$

Le maximum est obtenu pour  $\psi = 0$ . La puissance réactive n'est pas nulle dans ce cas.

Pour un moteur à pôles saillants, nous avons montré au paragraphe 11.4.1 que le moment du couple électromagnétique est :

$$\gamma = \frac{3}{\omega_m} E_v I_q + 3p(L_d - L_q) I_d I_q$$

Remplaçons  $I_d$  et  $I_q$  par leurs expressions en fonction de  $I$  et  $\psi$  :

$$\gamma = \frac{3}{\omega_m} E_v I \cos \psi + 3p(L_d - L_q) I^2 \cos \psi \sin \psi$$

Simplifions en appliquant la formule trigonométrique :

$$\sin 2a = 2 \cos a \sin a$$

Nous obtenons :

$$\gamma = \frac{3}{\omega_m} E_v I \cos \psi + \frac{3}{2} p(L_d - L_q) I^2 \sin 2\psi$$

Pour considérer à la fois le cas du moteur à aimant et celui du moteur à rotor bobiné, faisons apparaître le flux inducteur maximal  $\Psi_0$  et exprimons alors la force électromotrice en notant qu'il suffit de remplacer  $M_{fd} i_f$  par  $\Psi_{d0}$  dans la formule donnée au paragraphe 11.4.1 pour le moteur à rotor bobiné et que nous avons posé

$$\Psi_{d0} = \sqrt{\frac{3}{2}} \Psi_0 \text{ au paragraphe 10.4.1 :}$$

$$E_v = p \omega_m \frac{\Psi_0}{\sqrt{2}}$$

Cela donne :

$$\gamma = \frac{3}{\sqrt{2}} p \Psi_0 I \cos \psi + \frac{3}{2} p(L_d - L_q) I^2 \sin 2\psi$$

Pour obtenir le maximum du moment du couple à intensité efficace du courant fixée, il suffit d'annuler la dérivée de  $\gamma$  par rapport à  $\psi$  :

$$-\frac{3}{\sqrt{2}} p \Psi_0 I \sin \psi + 3p(L_d - L_q) I^2 \cos 2\psi = 0$$

Simplifions par  $I$  et utilisons la formule trigonométrique :

$$\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$$

Nous obtenons :

$$-\frac{3}{\sqrt{2}} p \psi_0 \sin \psi + 3p(L_d - L_q)I - 6p(L_d - L_q)I \sin^2 \psi = 0$$

C'est un trinôme du second degré en  $\sin \psi$  :

$$2(L_d - L_q)I \sin^2 \psi + \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_0 \sin \psi - (L_d - L_q)I = 0$$

Son discriminant est :

$$\Delta = \frac{1}{2} \psi_0^2 + 8(L_d - L_q)^2 I^2$$

La seule racine à conserver donne :

$$\psi = \text{Arcsin} \frac{-\frac{1}{\sqrt{2}} \psi_0 + \sqrt{\frac{1}{2} \psi_0^2 + 8(L_d - L_q)^2 I^2}}{4(L_d - L_q)I}$$

#### □ Facteur de puissance unitaire

Il est intéressant de fixer le facteur de puissance  $\cos \varphi$  à 1 pour limiter la puissance fournie par l'alimentation. La puissance réactive est alors nulle. Par contre, l'angle  $\psi$  n'est pas nul et le moteur ne fonctionne donc pas à couple maximal.

Pour un moteur à entrefer constant, le diagramme de Behn-Eschenburg simplifié se réduit à un triangle rectangle (*figure 12.7*).

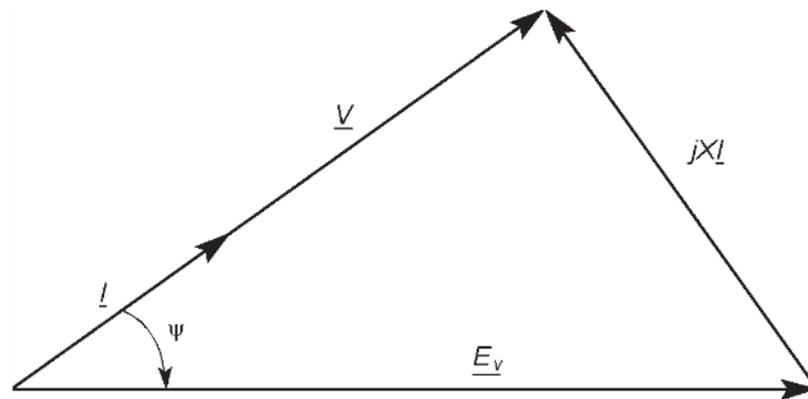


Figure 12.7 – Diagramme de Behn-Eschenburg simplifié à facteur de puissance unitaire.

Le cosinus de l'angle  $\psi$  s'écrit :

$$\cos \psi = \frac{V}{E_v}$$

Exprimons  $V$  avec le théorème de Pythagore :

$$\cos \psi = \frac{\sqrt{E_v^2 - (XI)^2}}{E_v} = \sqrt{1 - \left(\frac{XI}{E_v}\right)^2}$$

Remplaçons  $X$  par  $L\omega_s$  et utilisons l'expression de la force électromotrice rappelée plus haut :

$$E_v = p \omega_m \frac{\Psi_0}{\sqrt{2}} = \omega_s \frac{\Psi_0}{\sqrt{2}}$$

Nous obtenons ainsi :

$$\cos \psi = \sqrt{1 - 2\left(\frac{LI}{\Psi_0}\right)^2}$$

Compte tenu de  $\cos^2 \psi + \sin^2 \psi = 1$ , nous avons :

$$\sin^2 \psi = 2\left(\frac{LI}{\Psi_0}\right)^2$$

En notant qu'il faut choisir la valeur négative de  $\sin \psi$  qui vérifie cette équation puisque l'angle  $\psi$  est négatif, nous arrivons à :

$$\psi = -\text{Arcsin} \frac{\sqrt{2}LI}{\Psi_0}$$

Dans le cas du moteur à pôles saillants, on montre que la condition devient :

$$\psi = -\text{Arcsin} \frac{\frac{\Psi_0}{\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{\Psi_0^2}{2} - 4(L_d - L_q)L_q I^2}}{2(L_d - L_q)I}$$

### ■ Commande vectorielle

Le principe de la commande vectorielle d'un moteur synchrone est analogue à celui utilisé avec le moteur asynchrone. La machine à aimants ou à rotor bobiné est en général alimentée par un onduleur de tension muni d'une régulation de courant. Considérons un moteur à aimants et choisissons un repère dq lié au champ du rotor. Parmi les diverses solutions possibles, la plus simple est d'imposer une composante directe nulle au courant statorique ( $i_d = 0$ ). Le moment du couple est fixé par la composante en quadrature du courant statorique :

$$\gamma = p \Psi_{d0} i_q$$

Dans le cas du moteur synchrone à aimants montés en surface, cette relation était déjà assurée sans condition. Le choix de  $i_d = 0$  permet de minimiser les pertes par effet Joule. Dans le cas du moteur synchrone à aimants enterrés, la condition permet de simplifier la loi de commande du couple instantané puisque la formule initiale était :

$$\gamma = p\Psi_{d0}i_q + p(L_d - L_q)i_d i_q$$

Le couple de réluctance variable n'est pas utilisé.

# 13 • MOTEUR À RÉLUCTANCE VARIABLE

---

Le moteur à réluctance variable a une structure matérielle particulièrement simple, mais la modélisation nécessaire à sa commande est assez complexe en raison de l'influence des non-linéarités.

## 13.1 Généralités

### 13.1.1 Définition

Un moteur à réluctance variable est un moteur électrique dans lequel le couple est produit par la tendance de sa partie mobile à se déplacer vers une position où l'inductance de la phase alimentée est maximale, c'est-à-dire où la réluctance vue par cette bobine est minimale. L'appellation anglo-saxonne est SRM pour *Switched reluctance motor*.

### 13.1.2 Historique

Le moteur à réluctance est la version moderne du moteur électromagnétique datant des années 1830. Ce dernier n'a eu en son temps que peu d'applications en raison de l'absence de moyens adaptés pour sa commande. C'est depuis quelques décennies que les progrès réalisés en électronique de puissance et surtout en électronique de commande ont permis de faire du moteur à réluctance variable une solution compétitive pour les entraînements à vitesse variable. Toutefois, après environ trente ans de recherches, des études sont encore indispensables pour améliorer certaines caractéristiques de ces moteurs afin d'étendre leur domaine d'application.

### 13.1.3 Constitution

Le moteur à réluctance variable a une structure à double saillance. Il est caractérisé par le nombre  $N_s$  de dents au stator et le nombre  $N_r$  de dents au rotor. Pour donner ces paramètres, l'usage est de parler de moteur à réluctance variable  $N_s/N_r$ . Les combinaisons les plus courantes pour les nombres de dents sont 6/4, 6/8, 8/6, 12/8 et 12/10. Seul le stator possède un enroulement formé de bobines concentrées (*figure 13.1*). Deux bobines placées sur deux dents statoriques l'une en face de l'autre sont mises en série et forment une phase de l'enroulement. Le nombre  $m$  de phases du moteur est donc la moitié du nombre  $N_s$  de dents au stator :

$$m = \frac{N_s}{2}$$

Le moteur à réluctance variable a la même structure que les moteurs pas à pas à réluctance variable, mais il est utilisé différemment : l'objectif principal est de réaliser une conversion d'énergie et non un positionnement. Pour atteindre ce but, un autopilotage est nécessaire.

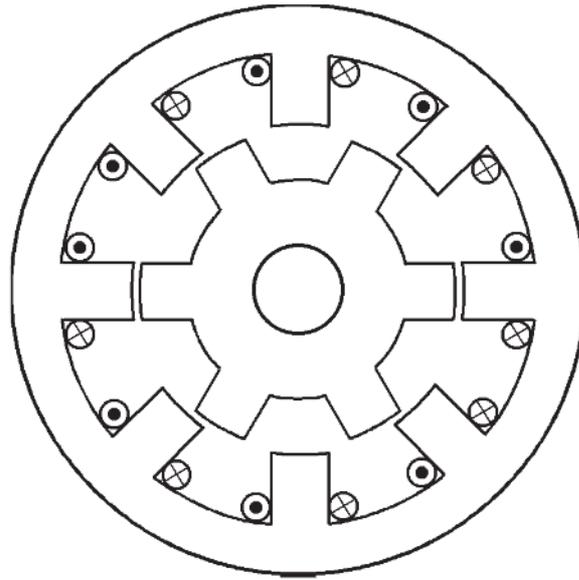


Figure 13.1 – Constitution d'un moteur à réluctance variable 8/6.

#### 13.1.4 Avantages et inconvénients

Le principal avantage du moteur à réluctance variable est sa simplicité de construction. Il en résulte un faible coût et une excellente fiabilité. L'absence de conducteurs et d'aimants au rotor permet de fabriquer des machines pouvant atteindre des vitesses de rotation très élevées : 20 000 à 50 000  $\text{tr} \cdot \text{min}^{-1}$ , voire 100 000  $\text{tr} \cdot \text{min}^{-1}$  dans certains cas. Le moteur à réluctance variable fonctionne dans les quatre quadrants avec une commande indépendante de la vitesse et du couple dans de larges gammes. Cela évite l'emploi de transmissions mécaniques toujours coûteuses et qui diminuent la fiabilité de l'entraînement.

Le principal inconvénient est que ce type de moteur exige une alimentation électronique et que la modélisation nécessaire à sa commande est assez complexe à cause des fortes non-linéarités dues en particulier à la double saillance de sa structure. Par ailleurs, l'ondulation du couple et le bruit sont assez élevés.

#### 13.1.5 Utilisation

Les moteurs à réluctance variable sont employés dans les entraînements industriels, mais aussi pour des véhicules électriques et pour des applications aéronautiques où

leur excellente fiabilité est un avantage important. Les moteurs à réluctance variable sont disponibles pour les petites et moyennes puissances (de quelques watts à quelques centaines de kilowatts).

## 13.2 Principe

La réluctance du circuit magnétique vu par une phase varie selon l'endroit où se situe le rotor. En conséquence, l'inductance de la phase est fonction de l'angle que fait le rotor par rapport à un axe de référence. Les positions pour lesquelles le circuit magnétique présente une réluctance minimale sont appelées positions de conjonction : elles correspondent à l'alignement d'une dent du rotor avec une dent du stator. Les positions pour lesquelles le circuit magnétique présente une réluctance maximale sont appelées positions d'opposition : elles correspondent à la présence d'une dent du rotor au milieu de l'intervalle que font deux dents du stator.

Chaque phase statorique est alimentée à tour de rôle par des créneaux de courant dans la zone où l'inductance est croissante. L'alimentation du stator est donc commandée par la position du rotor : c'est un autopilotage. Le couple est développé par la tendance du rotor à se placer dans une position de réluctance minimale (*figure 13.2*). Le sens du courant n'a aucune importance.

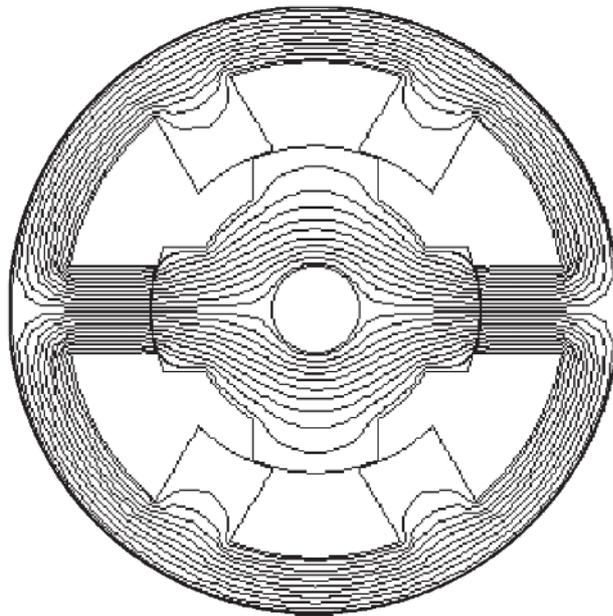


Figure 13.2 – Lignes de champ pour une position de réluctance minimale.

Il est possible d'alimenter une phase à la fois ou deux phases en même temps. Il est important de bien choisir les positions du rotor où commence et où se termine l'alimentation de chaque phase pour obtenir un couple à peu près constant. L'angle  $\theta_f$  à partir duquel le circuit d'une phase est fermé est appelé angle de fermeture. L'angle  $\theta_o$  à partir duquel le circuit d'une phase est ouvert est appelé angle d'ouverture.

La différence  $\theta_c = \theta_f - \theta_o$  est nommée angle de conduction. Enfin, la position du rotor pour laquelle le courant s'annule est l'angle d'extinction  $\theta_e$  (figure 13.3).

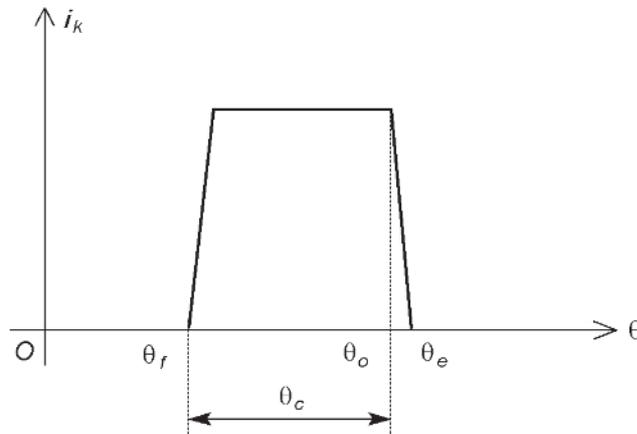


Figure 13.3 – Définition des angles caractéristiques.

Pour obtenir une rotation continue, les commutations des courants dans les phases s'enchaînent avec un ordre qui impose le sens de rotation (figure 13.4).

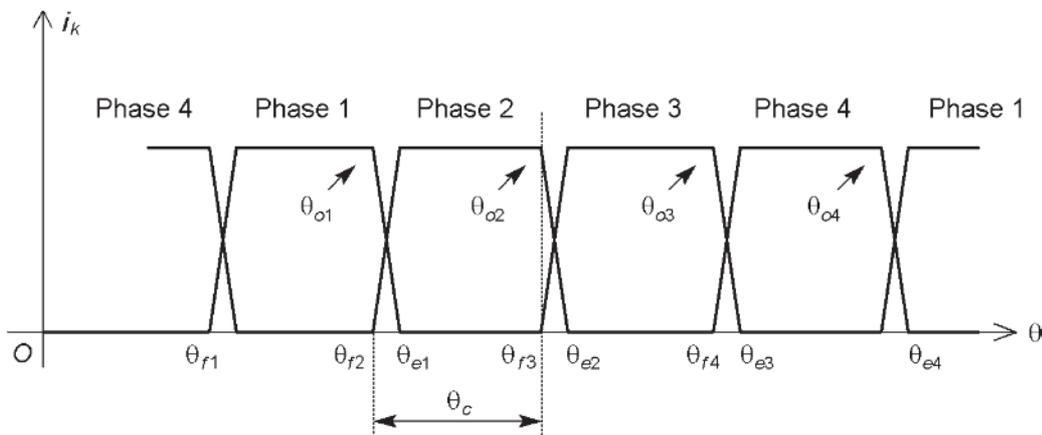


Figure 13.4 – Succession des commutations du courant pour un moteur à quatre phases avec une phase alimentée à la fois

Le sens de rotation dépend de la suite des commutations. Par exemple avec un moteur 6/8, la séquence peut être 1, 4, 3, 2, 1... pour le sens trigonométrique (figure 13.5) ou 1, 2, 3, 4, 1... pour le sens horaire (figure 13.6).

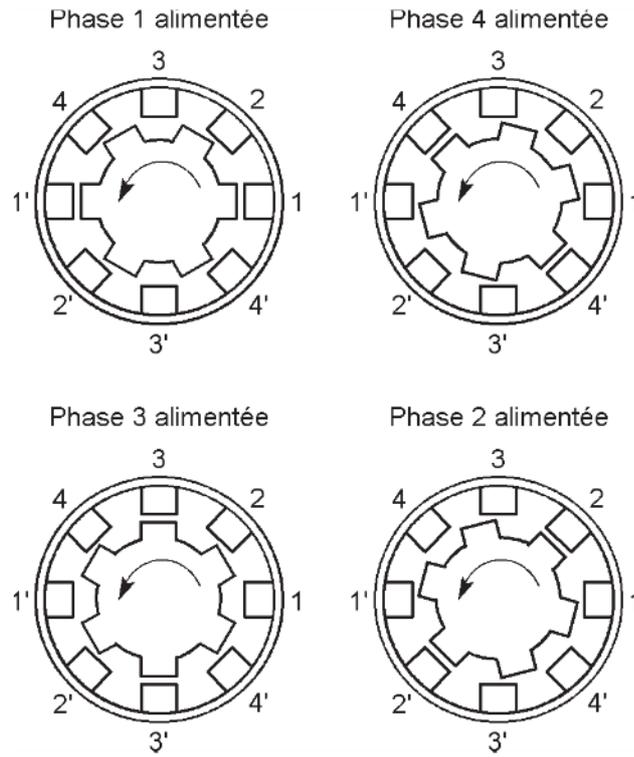


Figure 13.5 – Rotation dans le sens trigonométrique.

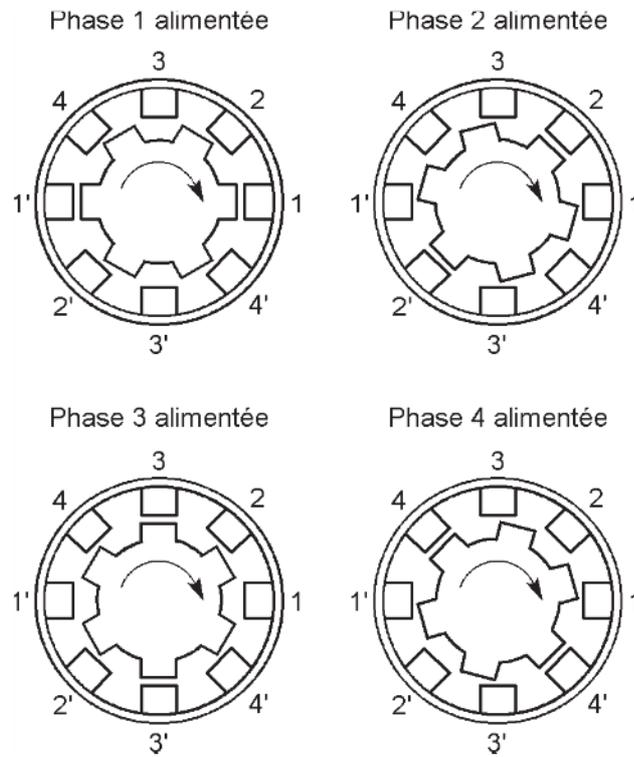


Figure 13.6 – Rotation dans le sens horaire.

## 13.3 Modélisation

### 13.3.1 Équation électrique

La tension  $v_k$  aux bornes de la phase  $k$ , de résistance  $R$ , est liée au courant  $i_k$  et au flux total  $\psi_k$  dans cette phase par la loi de Faraday :

$$v_k = R i_k + \frac{d\psi_k}{dt}$$

À cause de la double saillance de la machine et de la saturation du circuit magnétique, le flux  $\psi_k$  varie avec le courant  $i_k$  et la position du rotor  $\theta$  (*figure 13.7*). La différentielle de cette fonction de deux variables peut s'exprimer avec les dérivées partielles :

$$d\psi_k = \frac{\partial \psi_k}{\partial i_k} di_k + \frac{\partial \psi_k}{\partial \theta} d\theta$$

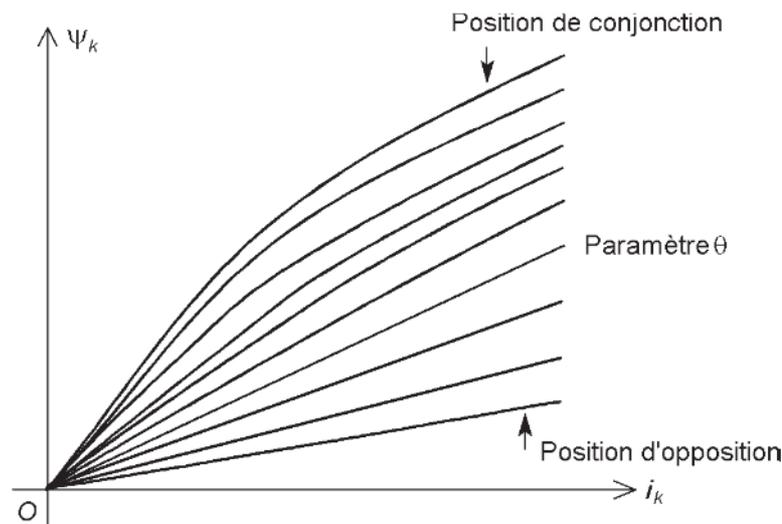


Figure 13.7 – Courbes du flux total en fonction du courant dans une phase, avec la position en paramètre.

L'équation électrique devient ainsi, après introduction de la vitesse angulaire du rotor,

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} :$$

$$v_k = R i_k + \frac{\partial \psi_k}{\partial i_k} \frac{di_k}{dt} + \frac{\partial \psi_k}{\partial \theta} \omega$$

### 13.3.2 Moment du couple

Compte tenu de l'indépendance magnétique des  $m$  phases, le flux total  $\psi_k$  dans la phase  $k$  ne dépend que du courant  $i_k$  dans cette phase et de la position  $\theta$  du rotor. La coénergie  $W'$  est ainsi une somme de  $k$  termes  $W'_k$  qui correspondent chacun à une phase :

$$W' = \sum_{k=1}^m W'_k$$

Quand on fait circuler un courant  $i_k$  dans la phase  $k$ , qui y engendre un flux total  $\psi_k$  alors que les autres phases sont en circuit ouvert, la coénergie totale  $W'$  se réduit au terme  $W'_k$ . Le couple a pour origine la variation de la coénergie en fonction de la position  $\theta$  du rotor. Ainsi, le moment  $\gamma_k$  du couple dû à la phase  $k$  s'écrit :

$$\gamma_k = \frac{\partial W'_k}{\partial \theta}$$

La coénergie est définie par :

$$W'_k = \int_0^{i_k} \psi_k di_k$$

Quand on trace la courbe du flux total  $\psi_k$  en fonction de l'intensité  $i_k$  du courant, pour une position angulaire fixée  $\theta$  du rotor, la coénergie  $W'_k$  est égale à l'aire grisée (figure 13.8).

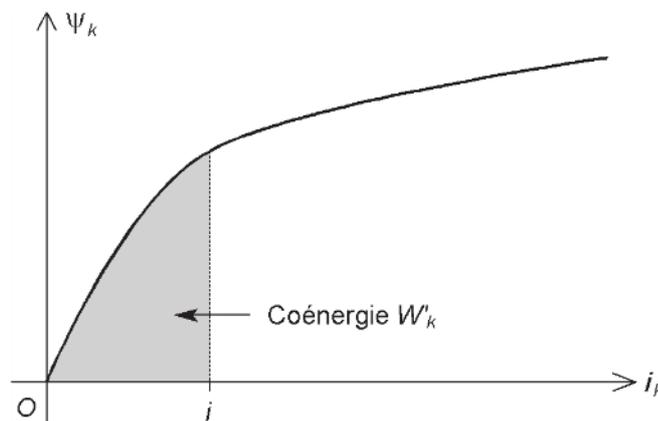


Figure 13.8 – Aire représentant la coénergie.

Après un déplacement élémentaire  $\delta\theta$  du rotor, la courbe représentant  $\psi_k$  en fonction de  $i_k$  est légèrement modifiée (figure 13.9). La variation correspondante  $\delta W'_k$  de la coénergie est égale à l'aire grisée entre les deux courbes et le moment du couple peut être calculé par :

$$\gamma_k = \frac{\delta W'_k}{\delta \theta}$$

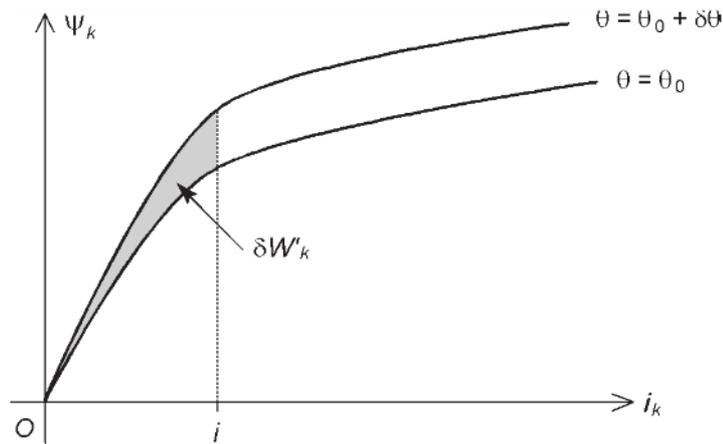


Figure 13.9 – Variation de la coénergie lors d'un déplacement élémentaire.

Le moment du couple électromagnétique total est donné par la somme des moments des couples électromagnétiques des  $m$  phases :

$$\gamma = \sum_{k=1}^m \gamma_k$$

### 13.3.3 Modèle linéaire

Dans un premier temps, pour avoir une idée de la façon dont il faut commander le moteur, il est intéressant de considérer un fonctionnement avec un courant assez faible de façon que le matériau magnétique ne soit pas saturé. Dans ce cas, il est possible de définir l'inductance  $L_k$  de la phase  $k$ . C'est le coefficient de proportionnalité entre le flux total  $\Psi_k$  et l'intensité  $i_k$  du courant :

$$\Psi_k = L_k i_k$$

Ce paramètre n'est fonction que de la position  $\theta$  du rotor. Comme la même situation est reproduite à chaque fois qu'une des  $N_r$  dents du rotor passe devant la phase considérée, l'inductance est une fonction périodique de la position  $\theta$ , avec une période  $\frac{2\pi}{N_r}$ . La courbe des variations de  $L_k$  en fonction de  $\theta$ , appelée profil d'inductance,

dépend de la réalisation de la machine. Si la largeur angulaire des dents du stator est égale à celle des dents du rotor, le profil est triangulaire (*figure 13.10*). Les ruptures de pente correspondent à des positions particulières des dents (*figure 13.11*).

Le profil d'inductance représenté précédemment est celui de la phase 1. Les profils correspondant aux autres phases sont décalés (*figure 13.12*).

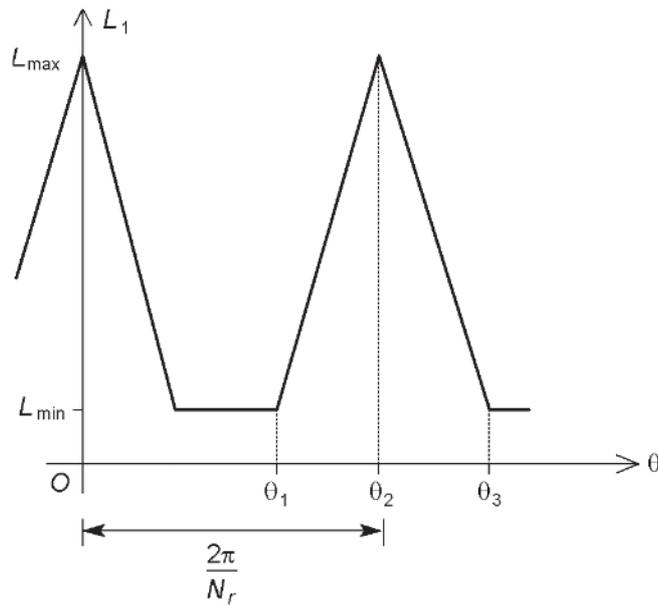


Figure 13.10 – Profil d'inductance pour un moteur dont les dents du stator et du rotor ont même largeur angulaire.

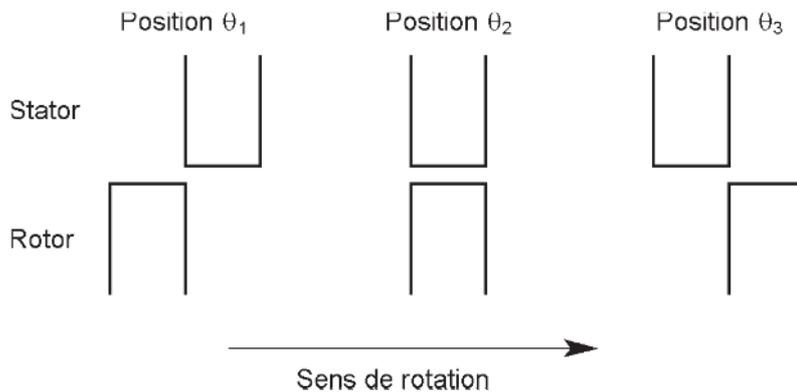


Figure 13.11 – Positions limites des dents sur une représentation développée de l'entrefer.

Si les largeurs angulaires des dents du stator et du rotor sont différentes, le profil est trapézoïdal (figure 13.13). Les ruptures de pente correspondent à des positions particulières des dents (figure 13.14).

En l'absence de saturation, la coénergie  $W'_k$  s'écrit :

$$W'_k = \frac{1}{2} L_k i_k^2$$

Le moment du couple développé par l'action de la phase  $k$  est alors :

$$\gamma_k = \frac{1}{2} \frac{dL_k}{d\theta} i_k^2$$

Copyright © 2005 Dunod. Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite à l'exception des cas prévus aux termes de l'article L.122-5, 2° et 3° a) du Code de la Propriété Intellectuelle.

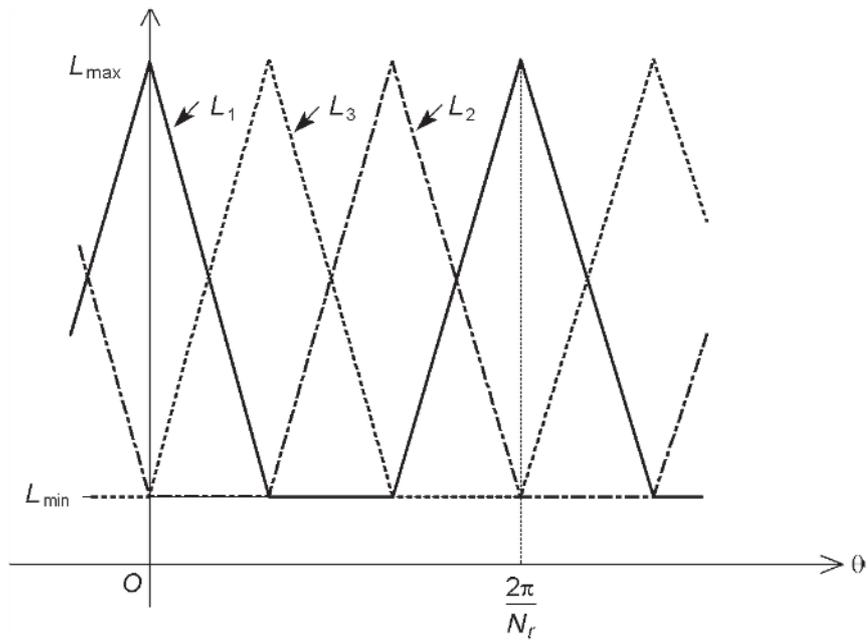


Figure 13.12 – Profils d'inductance des trois phases d'un moteur triphasé.

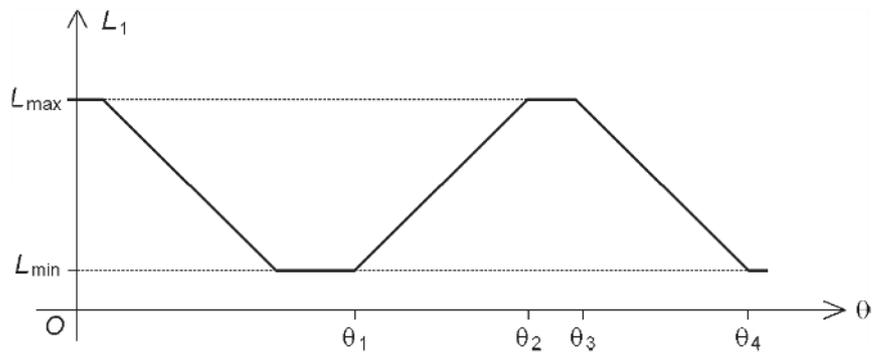


Figure 13.13 – Profil d'inductance pour un moteur dont les dents du stator et du rotor ont des largeurs angulaires différentes.

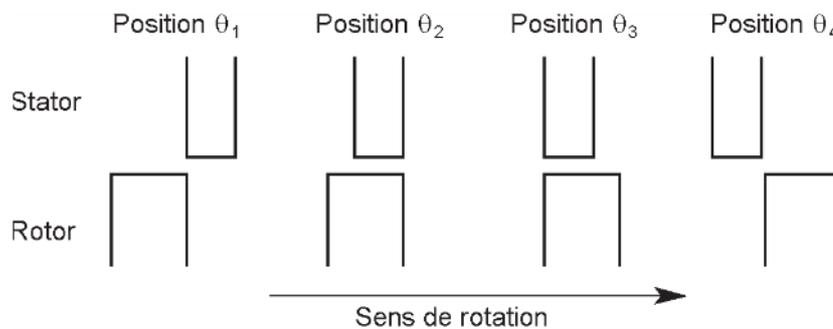


Figure 13.14 – Positions limites des dents sur une représentation développée de l'entrefer.

Pour obtenir un couple moteur, il faut donc imposer un courant dans la phase lorsque l'inductance est fonction croissante de la position :

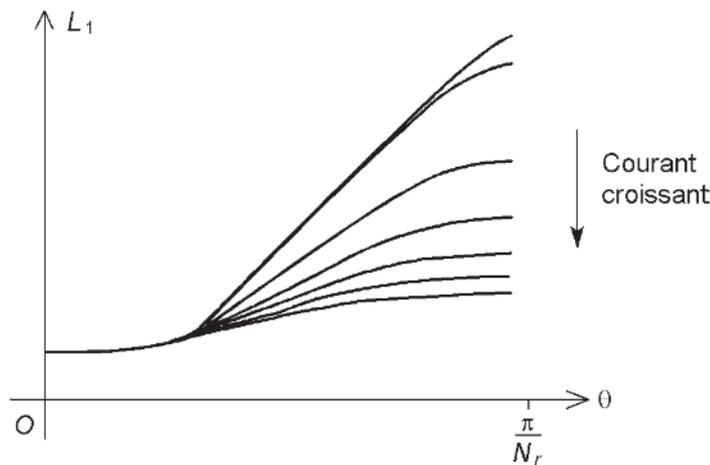
$$\frac{dL_k}{d\theta} > 0$$

Le couple obtenu a alors une amplitude proportionnelle au carré de l'intensité du courant.

### 13.3.4 Modèle non linéaire

En réalité, si le courant n'est pas faible, le matériau magnétique de la machine est saturé. Il est toujours possible de définir une inductance, mais ce paramètre est alors fonction à la fois de la position et du courant (*figure 13.15*).

Le tracé des courbes n'est donné que sur une demi-période puisque la deuxième moitié du motif est symétrique de la première. Ce profil peut être obtenu par simulation par un logiciel d'analyse électromagnétique ou à partir de mesures sur la machine.



**Figure 13.15** – Profil d'inductance pour un moteur dont les dents du stator et du rotor ont même largeur angulaire lorsque le matériau magnétique est saturé.

Le couple ne peut plus être décrit par une formule analytique. Une simulation numérique permet néanmoins de tracer les courbes (*figure 13.16*).

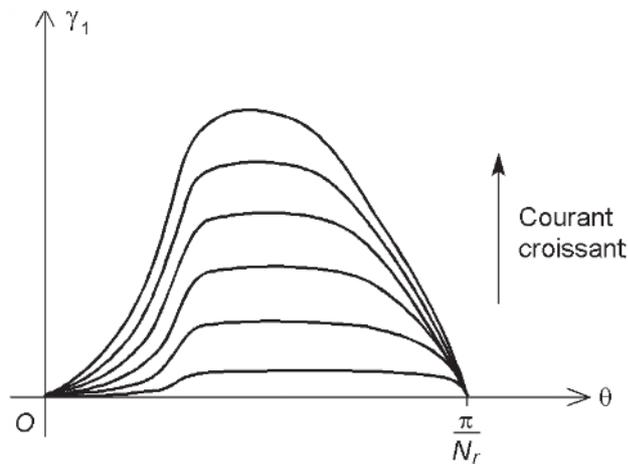


Figure 13.16 – Courbes du moment du couple développé par une phase en fonction de la position, avec l'intensité du courant en paramètre.

## 13.4 Alimentation électronique

### 13.4.1 Circuit de puissance

Le moteur à réluctance variable se contente d'une alimentation unidirectionnelle pour chaque phase puisque le sens du courant n'a aucune importance pour les phénomènes de réluctance variable. Ce courant, en forme de créneau, doit s'établir rapidement, être maintenu à peu près constant, puis décroître rapidement. Plusieurs solutions existent pour réaliser le circuit de puissance de l'alimentation du moteur. La complexité du convertisseur dépend bien sûr du nombre de phases de la machine, mais aussi des exigences sur les performances et la souplesse d'emploi du montage.

#### ■ Montage en demi-pont

Le montage en demi-pont est le plus utilisé. Il faut deux interrupteurs de puissance (transistors ou le plus souvent IGBT) et deux diodes par phase, soit  $2m$  interrupteurs et  $2m$  diodes pour un moteur à  $m$  phases (figure 13.17).

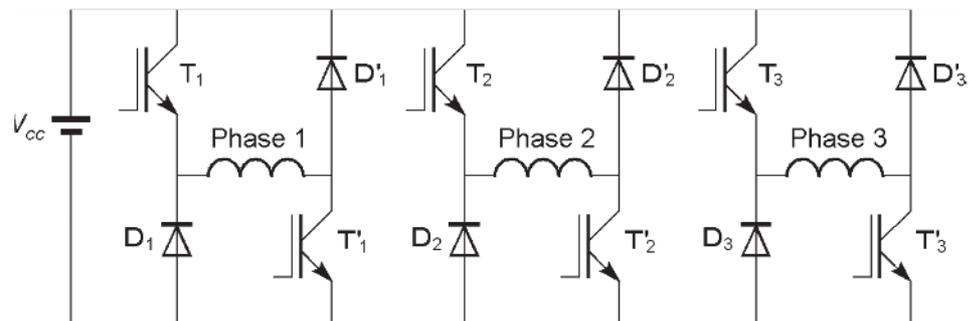


Figure 13.17 – Convertisseur en demi-pont pour un moteur à trois phases.

Pour faire croître le courant dans la phase numéro  $k$ , il faut fermer les interrupteurs  $T_k$  et  $T'_k$ . La tension d'alimentation  $V_{CC}$  est ainsi appliquée à la phase  $k$ . Les deux diodes  $D_k$  et  $D'_k$  sont alors bloquées. Pour assurer une régulation du courant par découpage, l'un des interrupteurs sert de hacheur tandis que l'autre est maintenu fermé. Une des diodes permet la circulation du courant quand l'interrupteur correspondant est ouvert (roue libre) alors que l'autre reste toujours bloquée. Par exemple, si  $T_k$  sert de hacheur, c'est  $D'_k$  qui joue le rôle de diode de roue libre. Pour faire décroître le courant, il faut ouvrir les deux interrupteurs  $T_k$  et  $T'_k$  et  $D_k$  et  $D'_k$  jouent le rôle de diodes de roue libre. L'énergie correspondante est renvoyée vers l'alimentation  $V_{CC}$ .

Le principal avantage de cette solution est l'indépendance totale de l'alimentation de chaque phase. L'inconvénient majeur est le grand nombre de composants nécessaires. Comme il y a deux chutes de tension d'interrupteurs passants en série avec une phase, ce montage n'est pas favorable aux applications où la tension d'alimentation est faible. Ce type de convertisseur est utilisé dans les cas où de bonnes performances sont exigées et où la réduction du coût n'est pas primordiale.

#### ■ Montage avec un interrupteur commun

Le montage avec un interrupteur commun permet de réduire le nombre de composants nécessaires. Il faut un interrupteur et une diode par phase, plus un interrupteur et une diode pour l'ensemble, soit  $m+1$  interrupteurs et  $m+1$  diodes pour un moteur à  $m$  phases (figure 13.18).

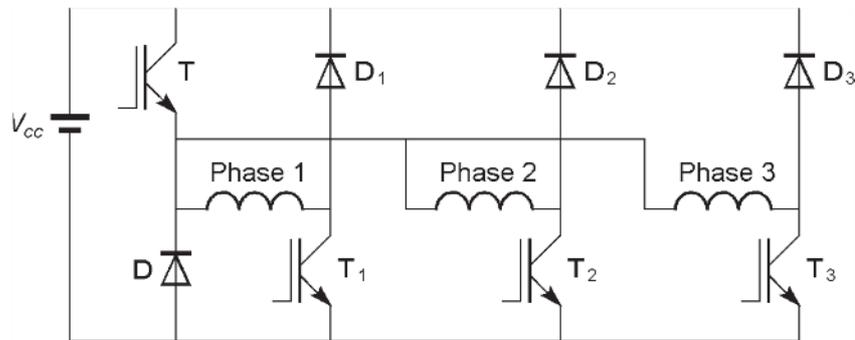


Figure 13.18 – Convertisseur avec un interrupteur commun pour un moteur à trois phases.

Pour faire croître le courant dans la phase numéro  $k$ , il faut fermer l'interrupteur  $T_k$  de la phase considérée et l'interrupteur commun  $T$ . La tension d'alimentation  $V_{CC}$  est ainsi appliquée à la phase  $k$ . La diode  $D_k$  de la phase considérée et la diode commune  $D$  sont alors bloquées. Pour assurer une régulation du courant par découpage, l'interrupteur commun  $T$  sert de hacheur tandis que l'interrupteur  $T_k$  de la phase considérée est maintenu fermé.  $D$  joue le rôle de diode de roue libre alors que  $D_k$  reste toujours bloquée. Pour faire décroître le courant, il faut ouvrir l'interrupteur  $T_k$  de la phase considérée et l'interrupteur commun  $T$ , et  $D_k$  et  $D$  jouent le rôle de diodes de roue libre. L'énergie correspondante est renvoyée vers l'alimentation  $V_{CC}$ .

Le principal avantage de cette solution est la réduction du nombre de composants nécessaires. L'inconvénient majeur est qu'il est impossible de commencer à magnétiser une phase tant qu'une autre phase est encore en cours de démagnétisation. Il en résulte une augmentation de l'ondulation du couple au moment des commutations. Comme il y a deux chutes de tension d'interrupteurs passants en série avec une phase, ce montage n'est pas favorable aux applications où la tension d'alimentation est faible. Ce type de convertisseur est utilisé dans les cas où la réduction du coût est un facteur important et où une certaine ondulation du couple est tolérable.

### ■ Montage avec interrupteurs partagés

Une solution intéressante entre le convertisseur en demi-pont et le montage avec un interrupteur commun consiste à partager un interrupteur entre deux phases qui ne sont jamais alimentées successivement. Par exemple, pour un moteur à quatre phases, il faut six interrupteurs et six diodes (*figure 13.19*).

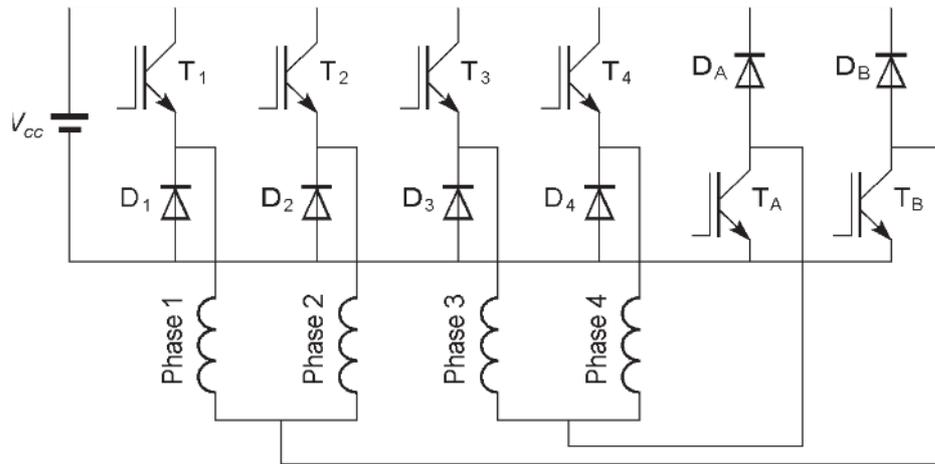


Figure 13.19 – Convertisseur avec interrupteurs partagés entre deux phases pour un moteur à quatre phases.

L'avantage de cette solution est de concilier une relative indépendance des phases avec une réduction du nombre des composants.

### ■ Montage à interrupteurs alternés

Dans ce type de convertisseur, les interrupteurs sont répartis en deux groupes : les uns sont branchés sur le pôle positif de l'alimentation et les autres sur le pôle négatif. Chaque interrupteur est connecté à plus d'une phase. Si  $n_b$  est le nombre d'interrupteurs branchés sur le pôle négatif et  $n_p$  le nombre d'interrupteurs branchés sur le pôle positif, le nombre maximal  $m_{\max}$  de phases qui peuvent être connectées au convertisseur est :

$$m_{\max} = n_p n_b$$

Par exemple, pour un moteur à quatre phases, il faut quatre interrupteurs, chacun étant branché à deux phases (*figure 13.20*), tandis que pour un moteur à six phases, il faut cinq interrupteurs, trois interrupteurs branchés sur le pôle négatif et connectés chacun à deux phases et deux interrupteurs branchés sur le pôle positif et connectés chacun à trois phases (*figure 13.21*)

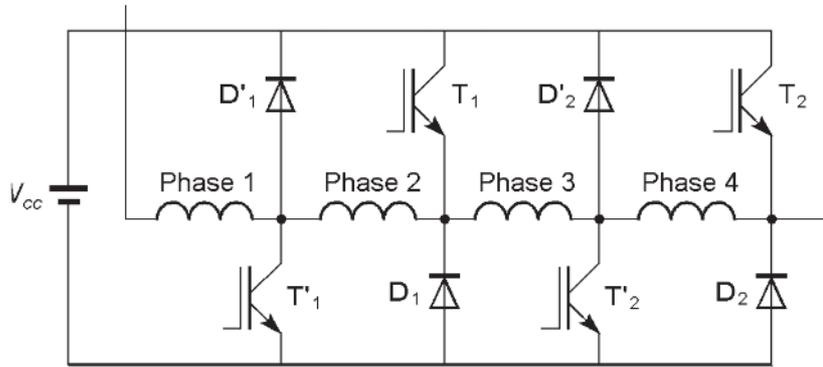


Figure 13.20 – Convertisseur à interrupteurs alternés pour un moteur à quatre phases.

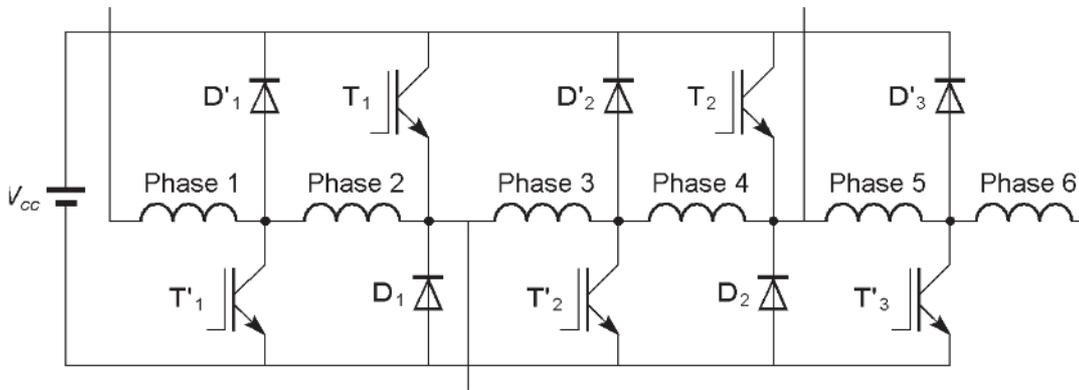


Figure 13.21 – Convertisseur à interrupteurs alternés pour un moteur à six phases.

Pour faire croître le courant dans la phase numéro 2 par exemple, il faut fermer les interrupteurs  $T_1$  et  $T'_1$ . La tension d'alimentation  $V_{CC}$  est alors appliquée à cette phase. Pour assurer une régulation du courant par découpage, l'interrupteur  $T'_1$  sert de hacheur tandis que l'interrupteur  $T_1$  est maintenu fermé.  $D_1$  joue le rôle de diode de roue libre. Pour faire décroître le courant, il faut ouvrir les interrupteurs  $T_1$  et  $T'_1$  et  $D_1$  et  $D'_1$  jouent le rôle de diodes de roue libre. L'énergie correspondante est renvoyée vers l'alimentation  $V_{CC}$ . La tension aux bornes de la phase est alors  $-V_{CC}$ .

Le principal avantage de cette solution est la réduction du nombre de composants nécessaires : cette diminution est d'autant plus sensible que le nombre de phase est

élevé. L'inconvénient majeur est qu'il est impossible de commencer à magnétiser une phase tant qu'une autre phase est encore en cours de démagnétisation. Comme il y a deux chutes de tension d'interrupteurs passants en série avec une phase, ce montage n'est pas favorable aux applications où la tension d'alimentation est faible. Ce type de convertisseur est utilisé pour les moteurs dont le nombre de phases est grand.

#### ■ Montage à alimentation dédoublée

Une solution particulière peut être appliquée aux moteurs dont le nombre de phases est pair. L'alimentation principale  $V_{CC}$  est dédoublée par deux condensateurs. Il faut un interrupteur de puissance et une diode par phase, soit  $m$  interrupteurs et  $m$  diodes pour un moteur à  $m$  phases (figure 13.22).

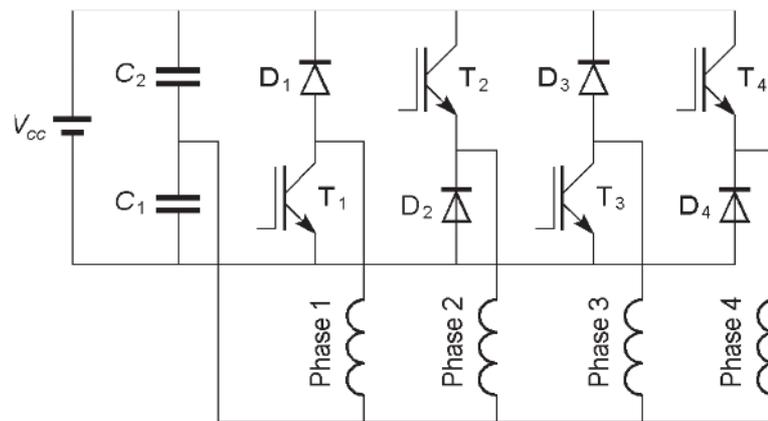


Figure 13.22 – Convertisseur à alimentation dédoublée pour un moteur à quatre phases.

Pour faire croître le courant dans la phase numéro  $k$ , il faut fermer l'interrupteur  $T_k$ . C'est le condensateur  $C_1$  qui fournit alors l'énergie. La tension  $V_{CC}/2$  est alors appliquée à la phase  $k$ . La diode  $D_k$  est bloquée. Pour assurer une régulation du courant par découpage, l'interrupteur commun  $T_k$  sert de hacheur et  $D_k$  joue le rôle de diode de roue libre. C'est le condensateur  $C_2$  qui reçoit l'énergie quand l'interrupteur est ouvert. Pour faire décroître le courant, il faut ouvrir l'interrupteur  $T_k$  et  $D_k$  joue le rôle de diode de roue libre. L'énergie correspondante est transférée au condensateur  $C_2$ .

Le principal avantage de cette solution est la réduction du nombre de composants nécessaires. L'inconvénient majeur est que la tension d'alimentation doit être le double de la tension à appliquer aux phases du moteur. Ce type de convertisseur donne des performances correctes à un coût raisonnable si une alimentation plus élevée que la tension nécessaire est facilement disponible.

#### 13.4.2 Commande du courant

Plusieurs solutions peuvent être utilisées pour fixer le courant dans une phase du moteur.

### ■ Impulsion unique

Dans un premier temps, la tension d'alimentation est appliquée à la phase et le courant croît. Dans un second temps, une tension nulle ou négative est appliquée à la phase et le courant décroît. Cette solution est très rudimentaire puisqu'il n'y a aucun contrôle du niveau de courant atteint. Elle n'est utilisée que si la durée de conduction est très réduite, c'est-à-dire lorsque la vitesse de rotation du moteur est élevée.

### ■ Découpage à fréquence fixe

Lorsque la vitesse est plus faible, il est nécessaire de contrôler le courant afin de le maintenir à peu près constant pendant la durée nécessaire. Un fonctionnement en hacheur permet une régulation du courant. Le découpage de la tension peut être effectué à fréquence fixe, le rapport cyclique du découpage étant commandé par l'erreur de courant, différence entre la valeur réelle et la consigne. Dans ce mode de fonctionnement, l'ondulation du courant n'est pas maîtrisée (*figure 13.23*).

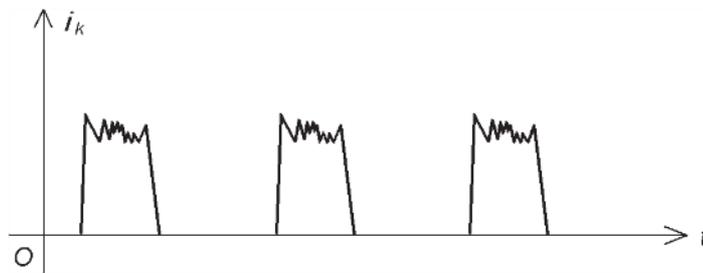


Figure 13.23 – Allure du courant dans une phase pour un fonctionnement en hacheur.

### ■ Découpage avec commande à hystérésis

Pour bien maîtriser l'ondulation du courant, il est possible d'utiliser un comparateur à hystérésis qui commande les commutations lorsque l'intensité du courant atteint une limite inférieure et une limite supérieure. L'ondulation du courant reste toujours dans une fourchette déterminée, mais la fréquence des commutations est variable et elle peut prendre des valeurs trop élevées si une limitation n'est pas imposée. Cette solution est la meilleure lorsque les conditions de fonctionnement du moteur ne varient pas dans de trop grandes proportions et que la fréquence reste donc raisonnable.

## 13.4.3 Détection de la position

Une information précise sur la position du rotor est indispensable pour commander correctement la commutation des courants dans les phases du moteur. Cette même information peut être utilisée pour un asservissement de position ou de vitesse (après dérivation). La détection peut se faire directement à partir d'un capteur de position ou indirectement sans capteur.

**■ Capteurs de position**

Différents types de capteurs de position peuvent être utilisés. Ces dispositifs sont soit de nature optique, soit de nature magnétique. Deux types sont essentiellement employés : le codeur incrémental et le capteur à effet Hall.

**□ Codeur incrémental**

Un codeur incrémental utilise un disque solidaire du rotor et qui comporte deux pistes concentriques formées d'alternances de surfaces opaques et translucides. La deuxième piste est décalée par rapport à la première. Les pistes sont éclairées par une diode électroluminescente et un phototransistor est placé de l'autre côté du disque en face de chacune des deux pistes. Le comptage du nombre d'impulsions reçues par le phototransistor permet de connaître la position. La seconde piste distingue les deux sens de rotation.

**□ Capteur à effet Hall**

Un aimant est solidaire du rotor. Une sonde à effet Hall, fixe, détecte la présence du champ magnétique à chaque passage de l'aimant. La combinaison de plusieurs dispositifs de ce type permet de commander les commutations de courant à la position voulue.

**■ Détection sans capteur**

Il est intéressant d'éliminer le capteur de position pour diminuer le coût du système, mais surtout pour améliorer sa fiabilité. Il faut alors déduire l'information sur la position du rotor à partir d'autres données. Plusieurs solutions existent. Par exemple, des mesures électriques permettent de connaître le profil d'inductance d'une phase. Les algorithmes de calcul nécessaires sont assez complexes et ils doivent être exécutés rapidement. C'est le développement des processeurs de signal numérique (DSP, *Digital signal processors*) qui a rendu possible l'utilisation de cette solution.

# 14 • MOTEUR À COURANT CONTINU

Pendant longtemps, le moteur à courant continu a été la principale solution pour obtenir une vitesse variable du fait de la simplicité de sa commande. Néanmoins, cette machine présente de nombreux inconvénients, avec en particulier son coût élevé et la maintenance nécessaire à cause des balais frottant sur le collecteur. Aujourd'hui, les moteurs à courant alternatif sont préférés dans la plupart des applications. Nous ne pouvons pas passer sous silence cette machine encore présente dans un certain nombre d'équipements, mais nous n'en ferons qu'une étude succincte.

## 14.1 Généralités

### 14.1.1 Définition

Un moteur à collecteur à courant continu est une machine destinée à transformer de l'énergie électrique disponible sous forme de tension et de courant continus, ou tout au moins unidirectionnels, en énergie mécanique. Il comporte un induit, un collecteur et des pôles magnétiques excités par une source de courant continu ou constitués d'aimants permanents.

### 14.1.2 Symbole

Le moteur à courant continu est représenté par son symbole normalisé (*figure 14.1*).

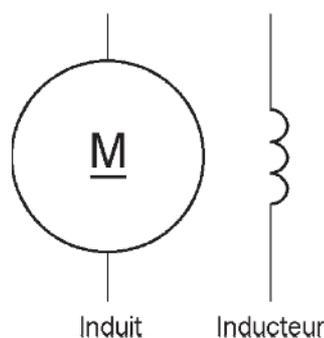


Figure 14.1 – Symbole normalisé du moteur à courant continu.

### 14.1.3 Constitution

Comme toute machine tournante, le moteur à courant continu comporte un stator et un rotor séparés par un entrefer, mais un dispositif particulier est nécessaire à son fonctionnement, le collecteur et les balais (*figure 14.2*).

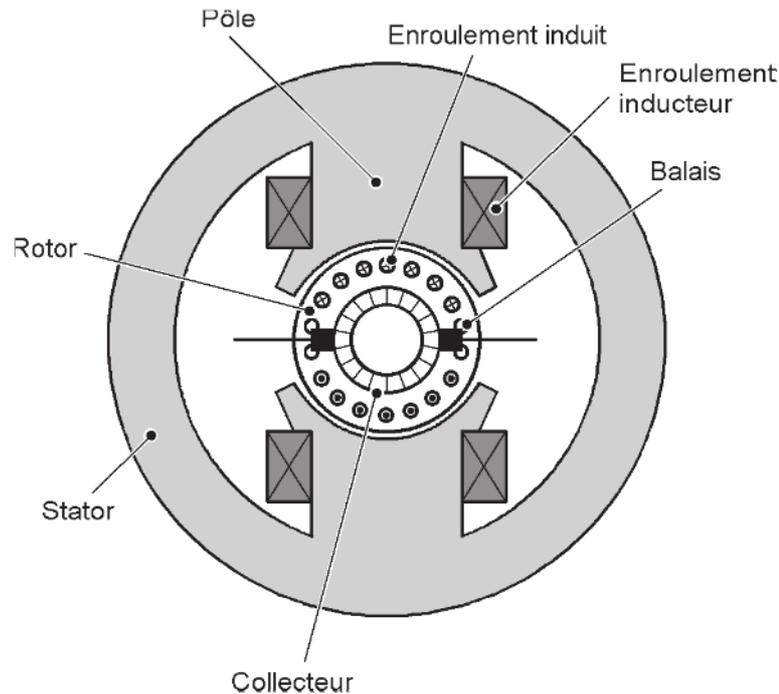


Figure 14.2 – Constitution d'un moteur à courant continu.

#### ■ Stator

Le stator est muni de pôles saillants qui portent un enroulement d'excitation (ou inducteur), destiné à être alimenté en continu. Il peut également être muni de pôles de commutation disposés entre les pôles inducteurs. Pour les petites machines, l'enroulement d'excitation peut être remplacé par des aimants permanents. Le nombre de pôles, toujours pair, est appelé  $2p$ , c'est-à-dire qu'on préfère parler du nombre  $p$  de paires de pôles.

#### ■ Rotor

Le rotor est formé d'un circuit magnétique feuilleté comportant des encoches dans lesquelles sont placés des conducteurs associés pour former l'enroulement d'induit.

#### ■ Collecteur et balais

Les connexions avec le générateur qui alimente le moteur se font par l'intermédiaire de contacts mobiles : les balais, solidaires du stator, frottent sur le collecteur lié au rotor. L'enroulement d'induit est relié au collecteur formé de lames conductrices isolées entre elles.

### 14.1.4 Modes d'excitation

L'inducteur d'un moteur à courant continu peut être branché de diverses façons. La machine est à excitation séparée (ou indépendante) quand l'inducteur et l'induit sont reliés à des sources différentes. La machine est à excitation liée lorsque l'inducteur et l'induit sont alimentés à partir de la même source. Trois possibilités existent alors :

- l'excitation parallèle (ou *shunt*) : inducteur et induit sont branchés en parallèle (*figure 14.3*) ;
- l'excitation série : inducteur et induit sont branchés en série (*figure 14.4*) ;
- l'excitation composée (ou *compound*) : un premier inducteur est en série avec l'induit et un second inducteur est en parallèle (*figure 14.5*).

En pratique, seules deux solutions sont habituellement retenues : l'excitation séparée pour la plupart des applications industrielles de puissance modérée et l'excitation série dans des cas particuliers comme la traction ferroviaire.

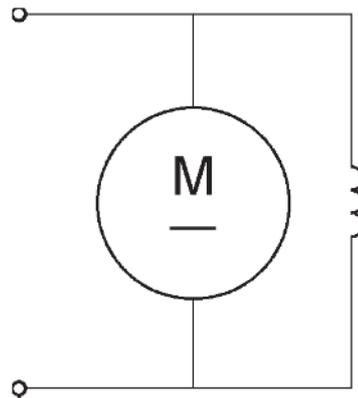


Figure 14.3 – Excitation parallèle.

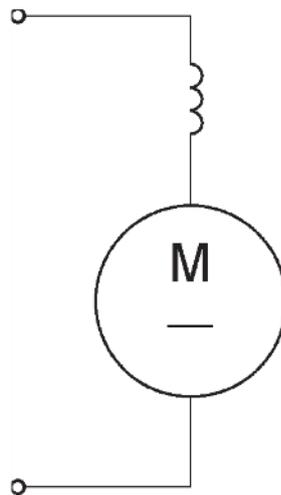


Figure 14.4 – Excitation série.

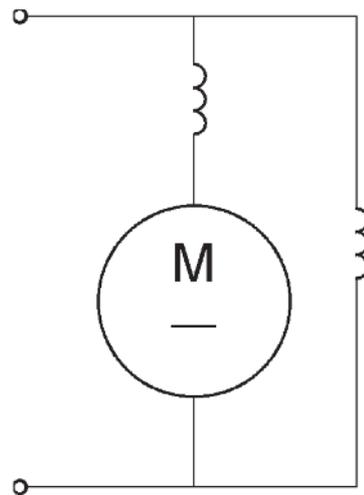


Figure 14.5 – Excitation composée.

### 14.1.5 Avantages et inconvénients

L'avantage principal, qui a fait le succès du moteur à courant continu, est la facilité de la commande de sa vitesse. L'inconvénient majeur est lié à la nécessité du système collecteur-balais. Sa présence est source de problèmes de commutation, d'étincelles, elle limite la vitesse de rotation et elle entraîne la nécessité d'une maintenance contraignante. La présence de l'induit au rotor, à l'intérieur du stator, ne facilite pas les échanges thermiques. Enfin, le prix des moteurs à courant continu est plus élevé que celui de ses concurrents.

### 14.1.6 Utilisation

Pendant longtemps, le moteur à courant continu a été la machine à vitesse variable par excellence. De plus en plus remplacé dans ce rôle par des moteurs à courant alternatif dans les applications industrielles, il est encore bien présent dans les réalisations existantes et il le sera encore pendant un certain nombre d'années, compte tenu de la durée de vie parfois assez longue des installations. Dans les applications industrielles, c'est le moteur à excitation séparé qui est de loin le plus courant : on le rencontre dans des domaines tels que le levage, le pompage, etc. L'application principale du moteur à excitation série est la traction ferroviaire. En France, la grande majorité des locomotives a utilisé cette solution pendant longtemps (jusqu'au TGV sud-est). Toutefois, les autres pays avaient souvent choisi des voies différentes.

Le moteur à courant continu a mieux résisté dans diverses applications de faible puissance. Dans les jouets, les petits moteurs à aimant alimentés par pile ont sans doute encore de l'avenir devant eux. C'est alors le coût qui est le critère de choix. Dans le domaine de la robotique, les petits actionneurs à courant continu à aimant sont encore bien présents malgré la concurrence des moteurs à courant continu sans balais. Enfin, dans les accessoires automobiles, le moteur à courant continu est la solution traditionnelle, mais là aussi, d'autres solutions sont explorées. Ces applications particulières sortent du cadre de notre étude consacrée aux moteurs industriels.

## 14.2 Principe

### 14.2.1 Topographie du champ magnétique

Les lignes de champ sortent du pôle nord de l'inducteur, traversent l'entrefer puis le rotor et entrent dans le pôle sud de l'autre pôle après un nouveau passage d'entrefer. Elles se referment enfin dans les deux demi-culasses (*figure 14.6*). Dans l'entrefer, les lignes de champ sont radiales. La mesure algébrique  $B$  du champ magnétique sur l'axe radial (*figure 14.7*) dépend de la variable angulaire  $\theta$ . Sous les pôles, le champ est à peu près constant. Avec l'orientation choisie,  $B$  est positif sous le pôle sud et négatif sous le pôle nord. Entre les pôles, le champ varie (*figure 14.8*) en s'annulant au passage par la droite perpendiculaire à l'axe des pôles, appelé ligne neutre (trace du plan neutre sur la figure en coupe). Nous avons supposé dans notre étude que le champ magnétique n'était dû qu'à l'inducteur. En réalité, l'enroulement d'induit, parcouru par un courant, contribue également à la création de flux dans la machine. Si le moteur est à vide et qu'il tourne à vitesse constante, le courant est très faible et on observe effectivement les variations de  $B$  précédentes. Par contre, si le moteur est en charge ou si la vitesse est variable, un courant non négligeable parcourt le bobinage, ce qui a pour effet de déformer les lignes de champ et de modifier la courbe de  $B$  en fonction de  $\theta$ . Les choses seront précisées au paragraphe 14.2.5 (réaction d'induit).

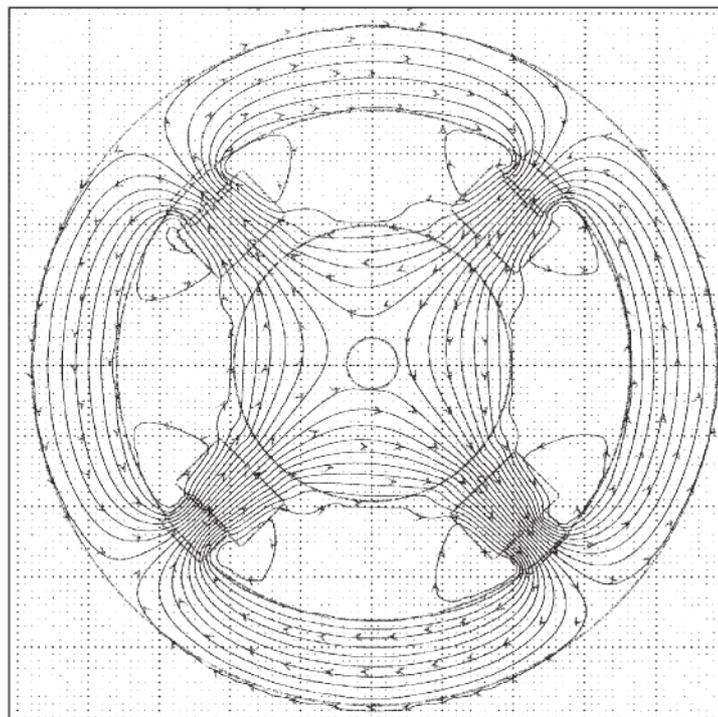


Figure 14.6 – Allure des lignes de champ dans un moteur à courant continu.

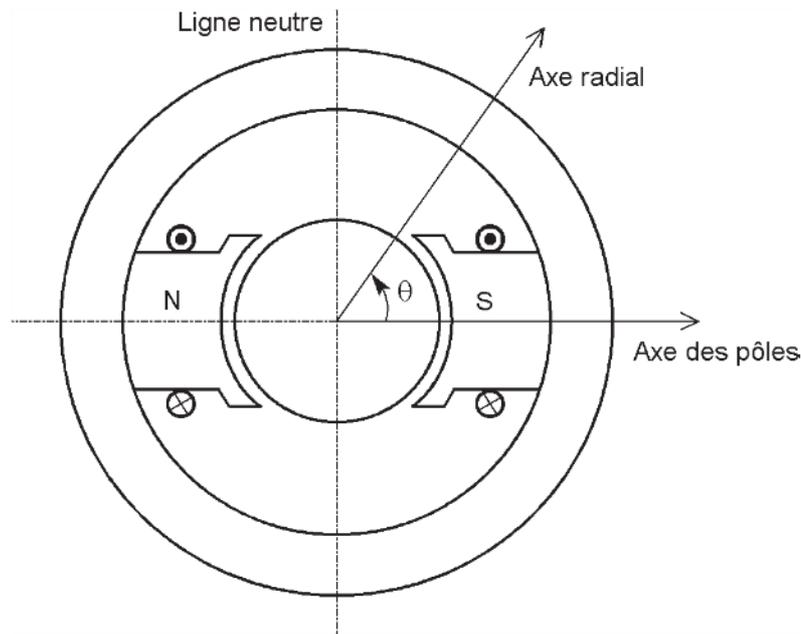


Figure 14.7 – Définition de l'axe radial utilisé pour la mesure algébrique du champ magnétique.

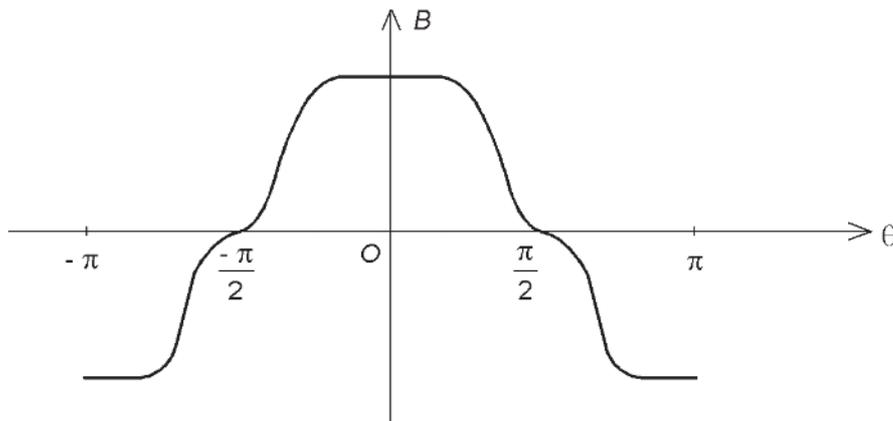


Figure 14.8 – Allure des variations de la mesure algébrique du champ magnétique dans l'entrefer en fonction de la position angulaire.

### 14.2.2 Caractéristique magnétique

Le flux inducteur  $\Phi$  est créé par la circulation d'un courant dans l'enroulement statorique. Lorsque l'intensité  $i_f$  de ce courant est faible, le circuit magnétique n'est pas saturé et  $\Phi$  est proportionnel à  $i_f$ . Quand le courant augmente, il apparaît un phénomène de saturation qui donne un coude dans la courbe de  $\Phi$  en fonction de  $i_f$  (figure 14.9).

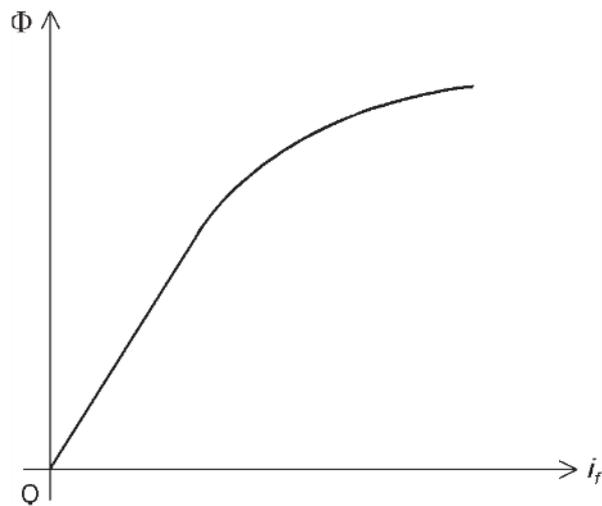


Figure 14.9 – Caractéristique magnétique.

### 14.2.3 Rôle du collecteur

Pour simplifier le raisonnement, nous allons considérer que les forces de Laplace s'appliquent sur les conducteurs comme si ces derniers étaient directement placés à la périphérie du rotor, sans encoches. Nous avons vu au paragraphe 1.5.1 que les forces sont en réalité appliquées aux dents, mais que globalement le résultat obtenu est le même.

Considérons un conducteur placé à la périphérie du rotor (*figure 14.10*). Un générateur fait circuler un courant dans le sens indiqué sur la figure. Une force de Laplace

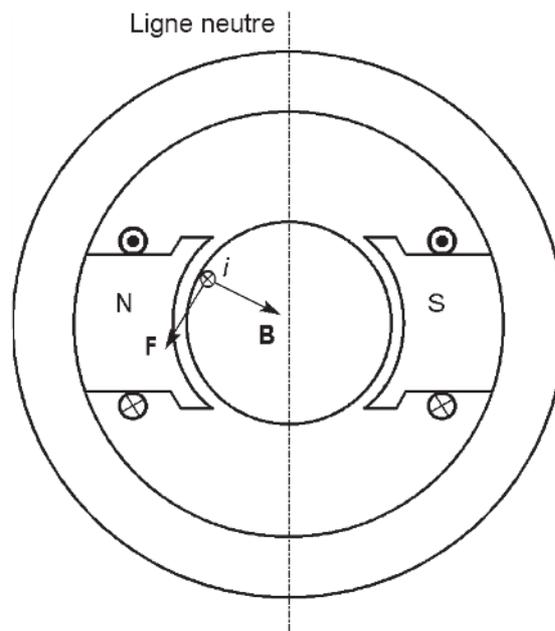
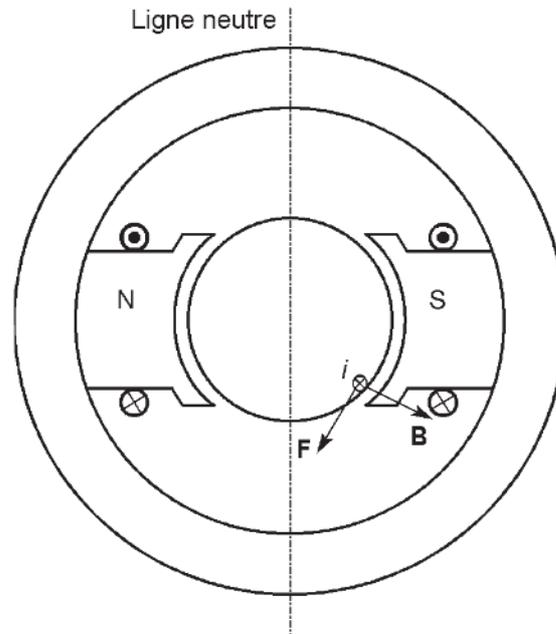


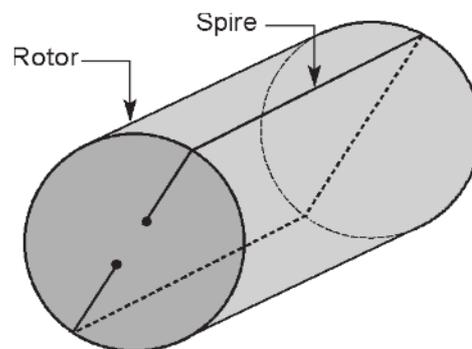
Figure 14.10 – Force de Laplace s'exerçant sur un conducteur.

s'exerce sur le conducteur qui est soumis au champ magnétique créé par l'inducteur. Cette force a pour direction la tangente au rotor et comme sens celui qui est indiqué sur la figure. Le moteur se met à tourner. Cependant, lorsque le conducteur traverse la ligne neutre, la force change de sens (*figure 14.11*). Il est donc impossible d'obtenir ainsi une rotation continue du moteur.



**Figure 14.11** – Force de Laplace pour un conducteur ayant traversé la ligne neutre.

Pour résoudre le problème, il faut inverser le sens du courant lorsque le conducteur arrive sur la ligne neutre. Pour cela, on associe deux conducteurs diamétralement opposés pour former une spire (*figure 14.12*). Du fait de l'orientation contraire des courants, les deux forces de Laplace tendent à faire tourner le rotor dans le même sens. Ensuite, on soude les extrémités de la spire à deux lames conductrices séparées par un isolant : c'est le collecteur. Deux balais sont disposés dans l'axe des pôles et



**Figure 14.12** – Formation d'une spire avec deux conducteurs diamétralement opposés.

frottent sur le collecteur. Le générateur qui alimente le moteur est relié à ces deux balais (*figure 14.13*). On a représenté en pointillés la liaison réalisée à l'arrière de la machine. Lorsque les conducteurs passent par la ligne neutre, les connexions du générateur sont inversées ce qui permet aux forces de Laplace d'entraîner le rotor

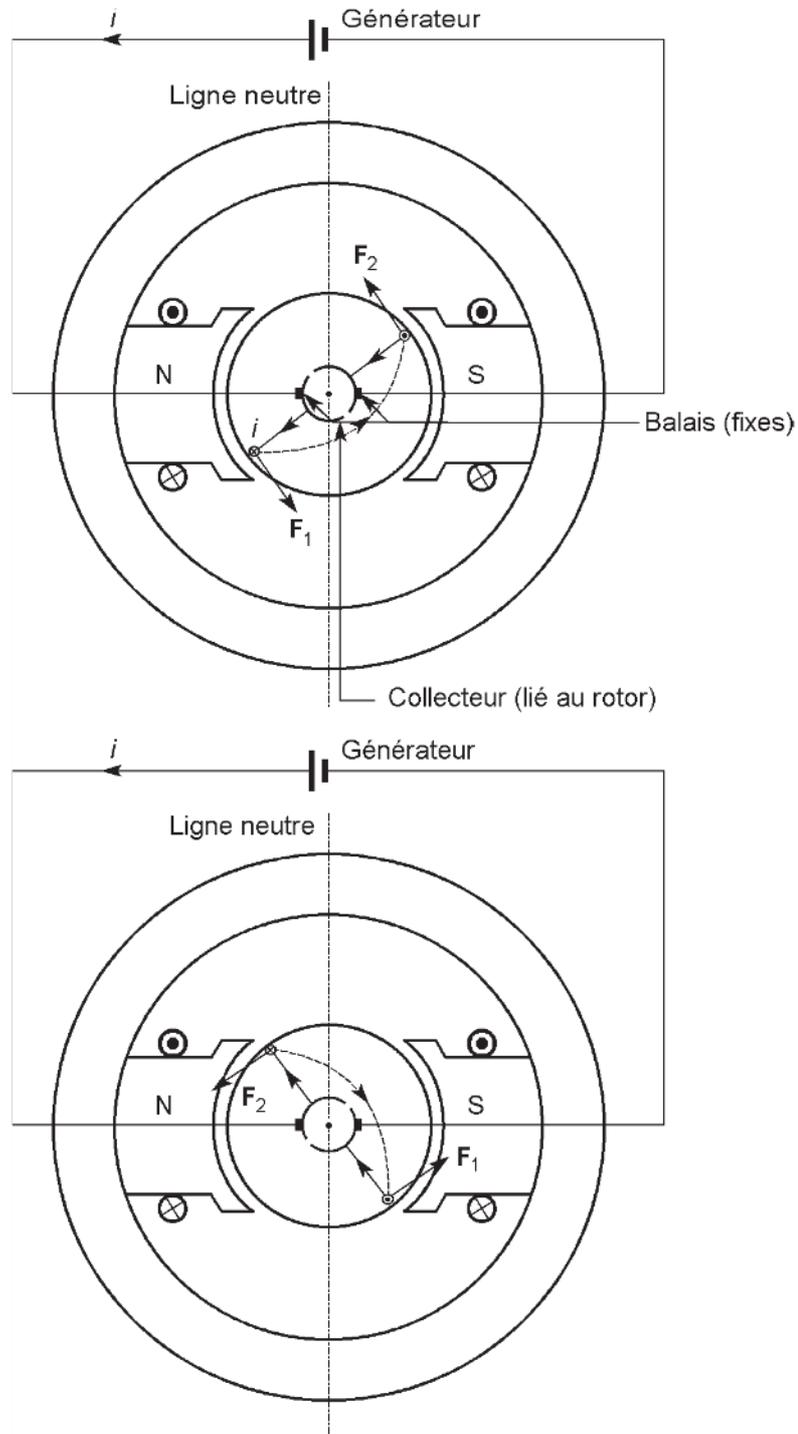


Figure 14.13 – Fonctionnement de l'ensemble collecteur-balais.

toujours dans le même sens. Les deux forces  $\mathbf{F}_1$  et  $\mathbf{F}_2$  forment un couple. Si  $i$  est le courant dans la spire,  $l$  la longueur des conducteurs utiles (ceux qui sont placés dans le champ magnétique) et  $R$  le rayon du rotor, le moment du couple par rapport à l'axe de rotation est proportionnel à la norme du champ magnétique (égale à la valeur absolue de la mesure algébrique  $B$ ) :

$$\gamma = 2Ril|B|$$

Lorsque le moteur tourne à vitesse constante, la courbe de  $\gamma$  en fonction du temps a la même allure que celle qui représente la valeur absolue de  $B$  en fonction de  $\theta$ , puisque le déplacement est proportionnel au temps (*figure 14.14*). On a bien obtenu un fonctionnement en moteur, mais les performances sont médiocres : le couple est faible et il n'est pas constant : il présente une forte ondulation. Pour remédier à cela, on multiplie le nombre de conducteurs et on les répartit le long de l'entrefer comme cela est expliqué dans la suite.

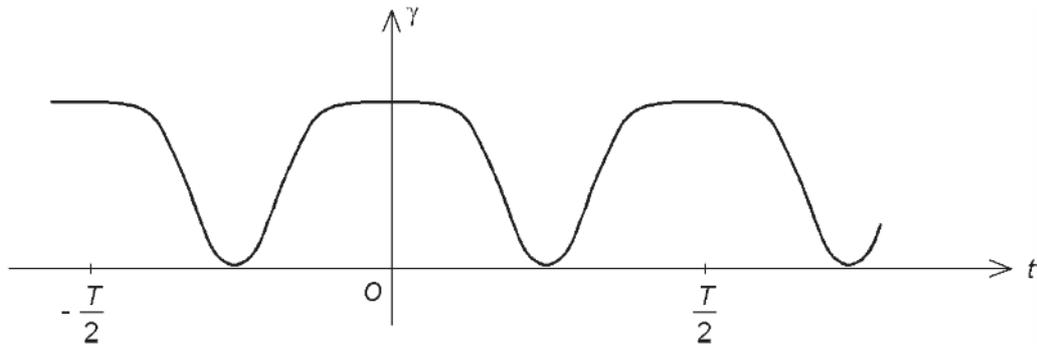


Figure 14.14 – Allure des variations du couple en fonction du temps.

#### 14.2.4 Conception de l'enroulement

Pour augmenter le couple, on remplace les deux conducteurs utiles précédents par deux faisceaux qui forment un ensemble de spires groupées au même endroit. On obtient la même forme de courbe pour  $\gamma$  en fonction de  $t$ , mais l'amplitude est multipliée par le nombre de spires par rapport au cas précédent. Ensuite, pour obtenir un fonctionnement plus satisfaisant pour le collecteur, on ferme l'enroulement sur lui-même. Pour cela, on dispose deux faisceaux superposés (*figure 14.15*). Chaque faisceau est représenté sur le schéma comme un conducteur unique. Avec les liaisons réalisées, on obtient bien un circuit fermé sans passer par le collecteur et le générateur qui alimente le moteur.

Pour diminuer l'ondulation de  $\gamma$ , il faut répartir les conducteurs le long de l'entrefer. Pour expliquer les effets de cette opération, considérons un cas élémentaire (*figure 14.16*). Plaçons huit faisceaux en quatre positions régulièrement décalées. Le collecteur comporte maintenant quatre lames. Le couple créé par un groupe de faisceaux diamétralement opposés varie de la même façon que précédemment. On peut tracer les variations des couples  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  correspondant aux deux groupes de

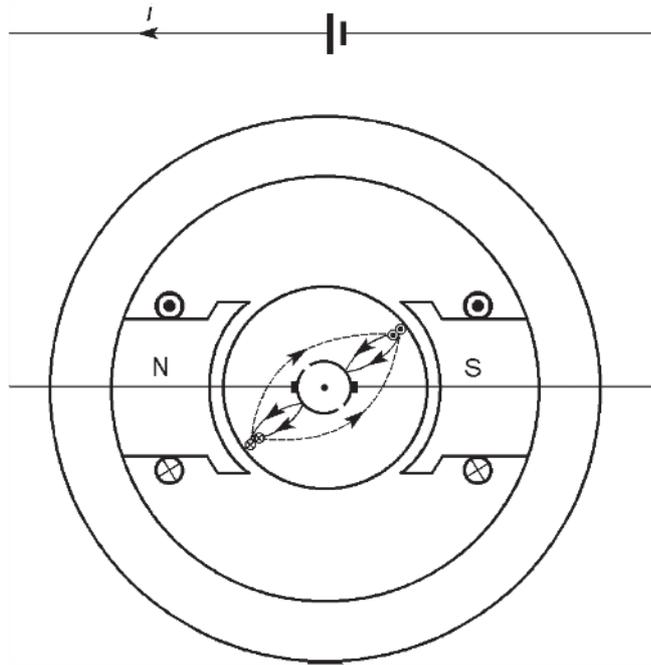


Figure 14.15 – Fermeture de l'enroulement.

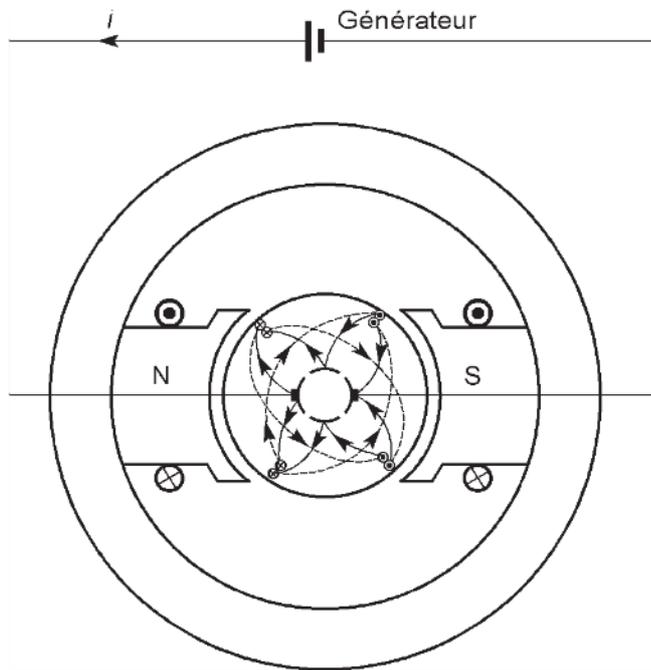


Figure 14.16 – Répartition des conducteurs le long de l'entrefer.

faisceaux décalés de  $90^\circ$  et du couple  $\gamma$  du moteur obtenu en faisant la somme des courbes précédentes (figure 14.17).  $T$  est la durée d'un tour du rotor. On constate que l'ondulation est nettement atténuée. Ce résultat pourra être amélioré en multipliant le nombre de positions régulièrement réparties le long de l'entrefer pour les

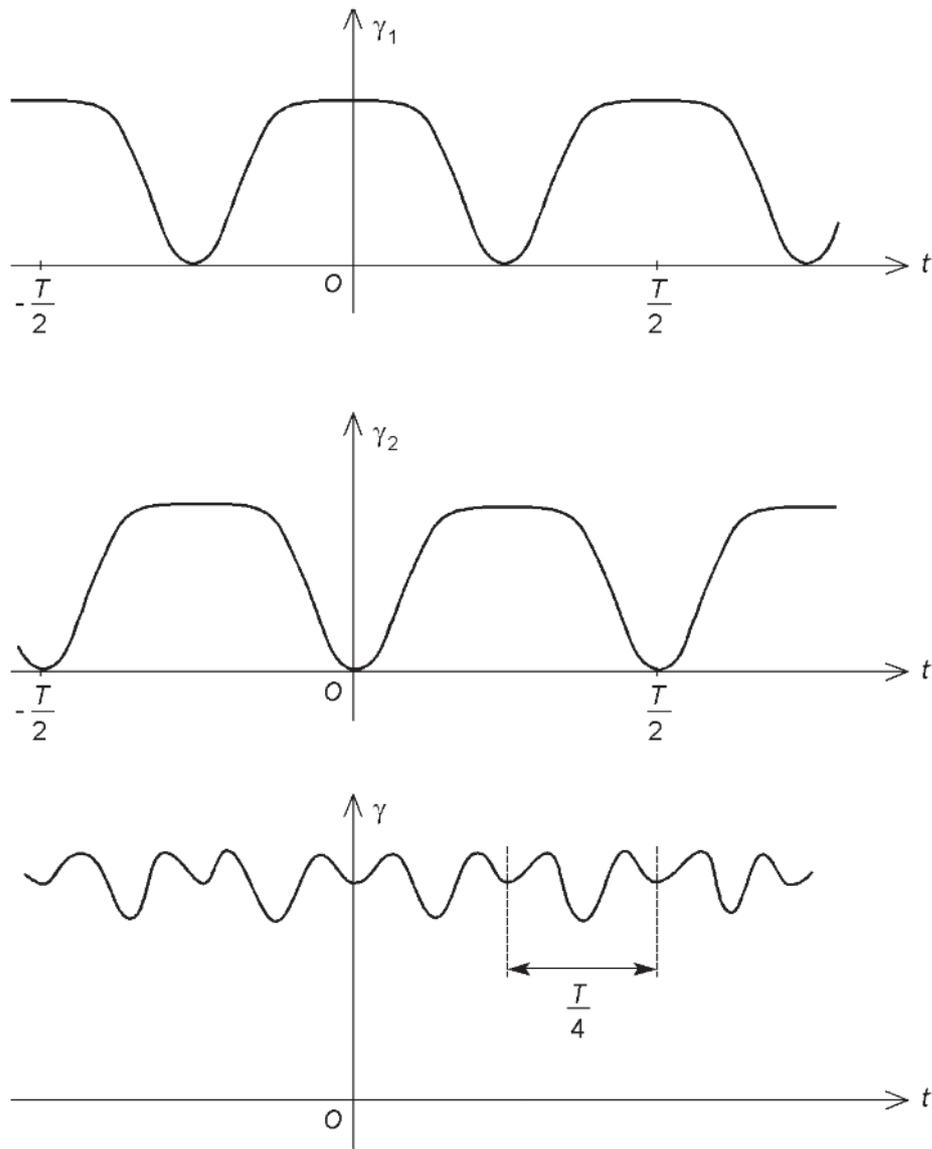


Figure 14.17 – Réduction de l'ondulation du couple.

faisceaux. Avec un nombre élevé, on peut pratiquement considérer que le couple est constant.

### 14.2.5 Machines multipolaires

Le moteur décrit jusqu'à présent possédait deux pôles et deux voies d'enroulement. On réalise aussi des machines qui ont un nombre plus élevé de pôles. Le principe de l'enroulement reste le même : les conducteurs sous les pôles nord étant tous parcourus par un courant dans un sens et les conducteurs sous les pôles sud étant parcourus par des courants de sens opposé. Le nombre de pôles étant pair, on le nomme  $2p$  ( $p$  est le nombre de paires de pôles). L'enroulement peut alors comporter plusieurs paires de voies. On appelle  $2a$  le nombre de voies ( $a$  est le nombre de paires

de voies). Si  $i$  est le courant fourni par l'alimentation du moteur, chaque voie est parcourue par  $\frac{i}{2a}$ .

### 14.2.6 Réaction d'induit

L'enroulement d'induit crée un champ magnétique lorsqu'il est parcouru par un courant non négligeable (moteur en charge ou en régime variable). La superposition de ce champ à celui de l'inducteur est appelée réaction d'induit. Compte tenu des commutations imposées par le collecteur, l'induit se comporte comme une bobine ayant pour axe la ligne neutre. On peut tracer les lignes du champ produit par l'induit quand l'inducteur n'est pas alimenté (figure 14.18) et la courbe du champ magnétique  $B_r$  en fonction de l'angle  $\theta$  (figure 14.19). Du fait de l'orthogonalité de l'axe de l'induit avec l'axe du champ des aimants, la réaction est qualifiée de transversale.

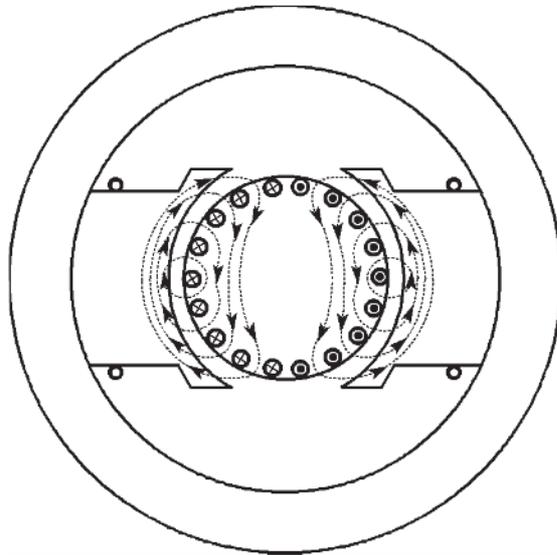


Figure 14.18 – Allure des lignes de champ de réaction d'induit.

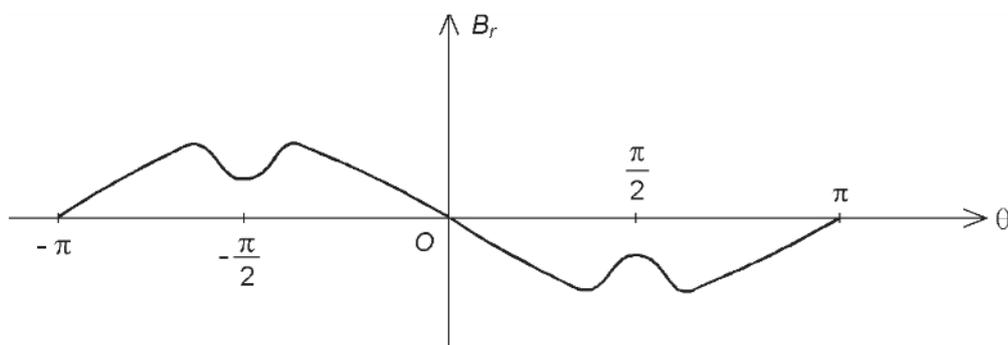


Figure 14.19 – Allure des variations de la mesure algébrique du champ magnétique de réaction d'induit dans l'entrefer en fonction de la position angulaire.

Dans le fonctionnement du moteur, les deux sources de champ (inducteur et induit) existent simultanément. Comme le circuit magnétique n'est pas linéaire à cause de la saturation du matériau ferromagnétique, le champ magnétique résultant n'est pas égal à la somme du champ de l'inducteur et du champ de réaction. Il est néanmoins possible d'ajouter les excitations magnétiques puis d'en déduire le champ magnétique correspondant (figure 14.20).

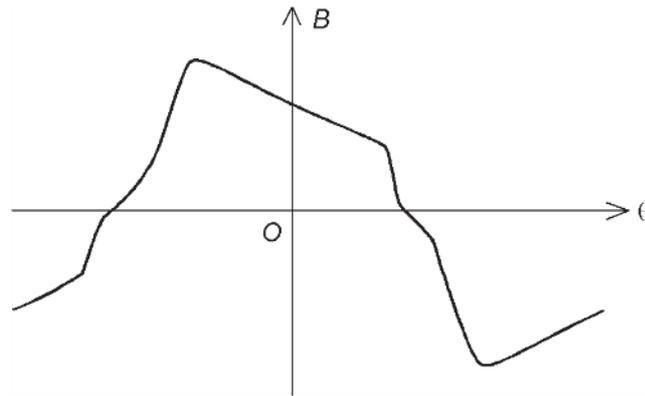


Figure 14.20 – Allure des variations du champ magnétique de réaction d'induit en fonction de la position angulaire.

Par rapport au fonctionnement à vide à vitesse constante, le champ est plus faible sur une moitié d'un pôle et plus élevé sur l'autre moitié. La diminution se produit à la sortie du pôle (par rapport au mouvement du rotor). De ce fait, il peut apparaître une saturation locale du matériau dans les cornes d'entrée. La conséquence importante de ce phénomène est que le flux sous un pôle est diminué car l'augmentation de  $B$  d'un côté ne compense pas la perte de l'autre côté à cause de la saturation. La seconde modification est le décalage de la ligne neutre (c'est-à-dire des points où le champ s'annule) dans le sens opposé à la rotation.

## 14.3 Modélisation

### 14.3.1 Couple électromagnétique

Le phénomène essentiel dans un moteur à courant continu est la création d'un couple qui tend à faire tourner le rotor. Compte tenu du nombre de conducteurs, on peut considérer que le couple est pratiquement constant et ne calculer que sa valeur moyenne. Pour cela, on va exprimer le travail des forces électromagnétiques pour un tour du rotor. Si  $i_a$  est l'intensité du courant traversant l'induit, et  $2a$  le nombre de voies en parallèle, chaque conducteur est parcouru par un courant  $\frac{i_a}{2a}$ . Lorsque ce conducteur passe d'une ligne neutre à la suivante, il coupe le flux  $\Phi$  d'un pôle. Pour un tour complet, le conducteur passe sous  $2p$  pôles. Le travail des forces électromagnétiques qui agissent sur le conducteur est donc :

$$\mathcal{T}_1 = \frac{i_a}{2a} \Phi 2p$$

Pour les  $N$  conducteurs actifs du rotor, le travail total est :

$$\mathcal{T} = N \frac{i_a}{2a} \Phi 2p$$

Par ailleurs, on peut écrire une autre expression de  $\mathcal{T}$  : le travail d'un couple est le produit de son moment par l'angle de rotation, soit, pour un tour ( $2\pi$  radians) :

$$\mathcal{T} = \gamma 2\pi$$

Le rapprochement des deux expressions de  $\mathcal{T}$  conduit à la formule qui donne le moment  $\gamma$  du couple électromagnétique :

$$\gamma = \frac{1}{2\pi} \frac{p}{a} N \Phi i_a$$

$N$ ,  $p$  et  $a$  sont des constantes et nous pouvons poser :

$$k = \frac{1}{2\pi} \frac{p}{a} N$$

ce qui nous donne pour le moment  $\gamma$  du couple électromagnétique :

$$\gamma = k \Phi i_a$$

### 14.3.2 Force contre-électromotrice

Les conducteurs actifs coupent les lignes du champ magnétique. Ils sont donc le siège d'un phénomène d'induction. On constate que les forces électromotrices induites sont toutes de même signe pour les conducteurs d'une voie : il suffit donc de les ajouter pour obtenir la force électromotrice totale. Les différents termes de la somme varient de la même façon que les couples élémentaires (voir au paragraphe 14.2.4). On obtient donc une force électromotrice résultante peu ondulée autour de sa valeur moyenne : on peut pratiquement la considérer comme une constante. Comme ce nombre est négatif, on préfère parler de la force contre-électromotrice en changeant de signe.

Pour le calcul, considérons tout d'abord un conducteur unique. Celui-ci coupe le flux  $\Phi$  sous un pôle lorsqu'il se déplace d'une ligne neutre à la suivante. Si  $\Delta t$  est la durée de ce parcours, la valeur moyenne de la force contre-électromotrice induite dans le conducteur est :

$$E'_{1\text{moy}} = \frac{\Phi}{\Delta t}$$

Avec une fréquence de rotation  $n$ , la durée d'un tour est  $\frac{1}{n}$ . Comme la machine comporte  $2p$  pôles, on a :

$$\Delta t = \frac{1}{2pn}$$

On en déduit :

$$E'_{1\text{moy}} = 2pn\Phi$$

Chaque voie comportant  $\frac{N}{2a}$  conducteurs actifs, la valeur moyenne de la force contre-électromotrice du moteur est :

$$E'_{\text{moy}} = \frac{N}{2a} 2pn\Phi$$

Comme on l'a précisé plus haut, on confond la force contre-électromotrice  $e'$  et sa valeur moyenne  $E'_{\text{moy}}$  :

$$e' = \frac{p}{a} Nn\Phi$$

En introduisant la constante  $k$  déjà définie et en faisant apparaître la vitesse de rotation  $\omega_m$  plutôt que la fréquence de rotation  $n$ , cette formule s'écrit :

$$e' = k\Phi\omega_m$$

### 14.3.3 Loi des mailles pour l'induit

Pour définir la relation entre tension  $u_a$  et courant  $i_a$  pour l'induit, choisissons la convention récepteur. L'enroulement d'induit présente une force contre-électromotrice  $e'$  et il a une résistance  $R_a$  et une inductance  $L_a$ . La loi des mailles s'écrit :

$$u_a = e' + R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt}$$

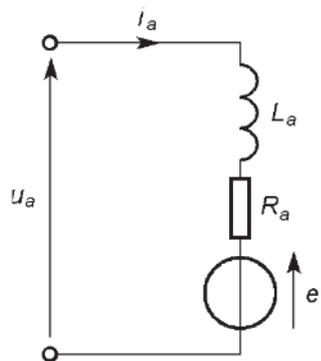


Figure 14.21 – Schéma équivalent.

On peut représenter l'induit par un schéma électrique équivalent (*figure 14.21*).

La résistance  $R_a$  comprend en fait deux termes : la résistance  $R$  de l'enroulement proprement dit et la résistance  $R_b$  des contacts balais-collecteur. Ces deux termes se comportent différemment.  $R$  est la résistance d'un conducteur. Elle est donc indépendante du courant, mais varie avec la température.

$R_b$  est la résistance équivalente aux contacts entre balais et collecteur. Elle n'est pas indépendante du courant. En effet, la chute de tension entre un balai et le collecteur varie de façon complexe. Elle dépend du type de balais, du sens de passage du courant et de la densité de courant (*figure 14.22*). Vues des bornes du moteur, les deux chutes de tension s'ajoutent (*figure 14.23*). On peut définir une résistance équivalente par :

$$R_b = \frac{\Delta u}{i}$$

Toutefois, cette résistance n'est pas constante : elle varie en fonction de la densité de courant. Une approximation différente consiste à considérer une chute de tension constante  $\Delta u$  :

$$u = e' + Ri + L_a \frac{di}{dt} + \Delta u$$

Cette chute de tension est habituellement de l'ordre de 2 V.

En régime permanent, le courant est constant et la formule se simplifie :

$$u_a = e' + R_a i_a$$

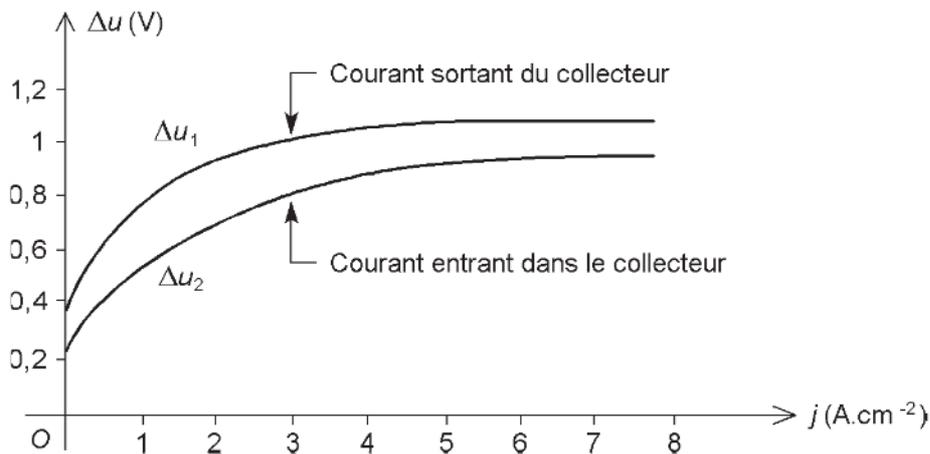


Figure 14.22 – Variations de la chute de tension entre balai et collecteur en fonction de la densité de courant.

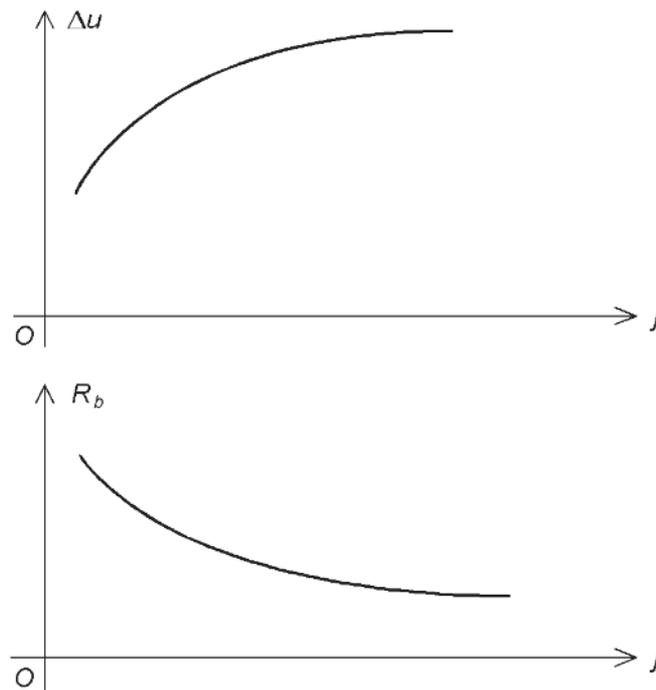


Figure 14.23 – Allure des variations de la chute de tension pour les deux balais et de la résistance équivalente en fonction de la densité de courant.

#### 14.3.4 Loi des mailles pour l'inducteur

L'inducteur se comporte comme une simple bobine de résistance  $R_f$  et d'inductance  $L_f$ . Si  $u_f$  est la tension à ses bornes et  $i_f$  l'intensité du courant qui le traverse, la loi des mailles s'écrit :

$$u_f = R_f i_f + L_f \frac{di_f}{dt}$$

En régime permanent, le courant est constant et la formule se simplifie :

$$u_f = R_f i_f$$

## 14.4 Étude énergétique

### 14.4.1 Bilan des puissances en régime permanent

La puissance appelée par l'induit du moteur est :

$$P_a = u_a i_a$$

La puissance reçue par le circuit inducteur (puissance d'excitation) est :

$$P_e = u_f i_f$$

L'induit est le siège de pertes par effet Joule  $p_{ja}$  :

$$p_{ja} = R_a i_a^2$$

L'inducteur est le siège de pertes par effet Joule  $p_{je}$  :

$$p_{je} = R_f i_f^2$$

Le rotor étant soumis à un flux variable à cause de son mouvement, il est le siège de pertes ferromagnétiques  $p_f$ . Les frottements sur les paliers, la ventilation et les frottements des balais sur le collecteur conduisent à des pertes mécaniques  $p_m$ . Le total des pertes est ainsi :

$$p = p_{ja} + p_{je} + p_f + p_m$$

La puissance disponible pour la charge est appelée puissance utile  $P_u$ . Elle représente la différence entre la puissance électrique appelée  $P_a$  et l'ensemble des pertes :

$$P_u = P_a - p$$

#### 14.4.2 Rendement

Le rendement est le rapport de la puissance utile et de la puissance totale appelée par le moteur :

$$\eta = \frac{P_u}{P_a + P_e}$$

## 14.5 Caractéristiques suivant le mode d'excitation

### 14.5.1 Expression de la vitesse

Partons de la loi des mailles pour l'induit en régime permanent :

$$u_a = e' + R_a i_a$$

et introduisons l'expression de la force contre-électromotrice :

$$e' = k\Phi \omega_m$$

Nous obtenons :

$$u_a = k\Phi \omega_m + R_a i_a$$

Nous pouvons en déduire l'expression de la vitesse de rotation  $\omega_m$  :

$$\omega_m = \frac{u_a - R_a i_a}{k\Phi}$$

Nous examinerons les caractéristiques des deux types de machines ayant des utilisations courantes : les moteurs à excitation séparée et les moteurs à excitation série.

### 14.5.2 Excitation indépendante

L'excitation séparée est utilisée dans des domaines très variés, avec des puissances de tous ordres.

Pour faire varier la vitesse du moteur, on peut agir soit sur la tension d'alimentation de l'induit, soit sur le flux, par l'intermédiaire du courant dans l'inducteur. La meilleure solution consiste à agir sur la tension d'induit à flux constant. Le même couple est alors développé à toutes les vitesses. Ce mode de fonctionnement est appelé « à couple constant ». Lorsque le moteur est alimenté sous tension constante, on peut augmenter la vitesse en diminuant le flux, mais le couple est plus faible à courant donné puisque son moment est proportionnel au flux. Ce type d'action n'est utilisé que pour étendre la plage de variation de la vitesse. Ce mode de fonctionnement est appelé « à puissance constante ».

#### ■ Fonctionnement à couple constant

L'inducteur est alimenté par son courant nominal. Le flux  $\Phi$  est donc imposé. Le moteur peut développer son couple nominal à toutes les vitesses, ce qui justifie l'appellation de fonctionnement à couple constant. La vitesse de rotation  $\omega_m$  est toujours donnée par la formule :

$$\omega_m = \frac{u_a - R_a i_a}{k \Phi}$$

Par ailleurs, le moment  $\gamma$  du couple électromagnétique est :

$$\gamma = k \Phi i_a$$

L'expression de la vitesse de rotation en fonction du moment du couple est donc :

$$\omega_m = \frac{u_a - \frac{R_a}{k \Phi} \gamma}{k \Phi} = \frac{u_a}{k \Phi} - \frac{R_a \gamma}{(k \Phi)^2}$$

Les courbes qui représentent la vitesse de rotation en fonction du moment du couple sont des droites paramétrées par la tension  $u_a$  appliquée à l'induit (*figure 14.24*).

Le fonctionnement est possible dans les quatre quadrants (*figure 14.25*). Le démarrage s'effectue par augmentation progressive de la tension d'induit. Le freinage s'effectue avec récupération de l'énergie, la machine fonctionnant alors en génératrice. Ces fonctionnements sont possibles dans les deux sens de rotation (*tableau 14.1*). L'inversion du sens de rotation est obtenue par l'inversion des polarités de la tension d'induit ou par celle du sens du courant d'excitation.

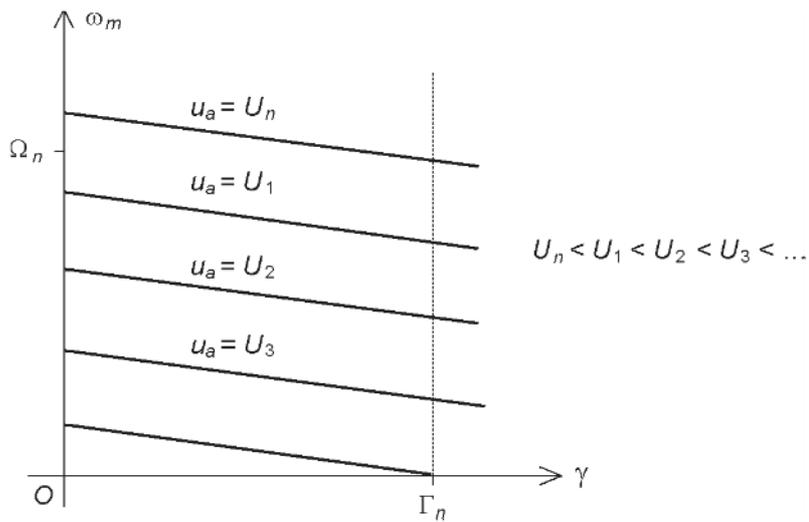


Figure 14.24 – Courbes de la vitesse de rotation en fonction du moment du couple, avec la tension d'induit en paramètre.

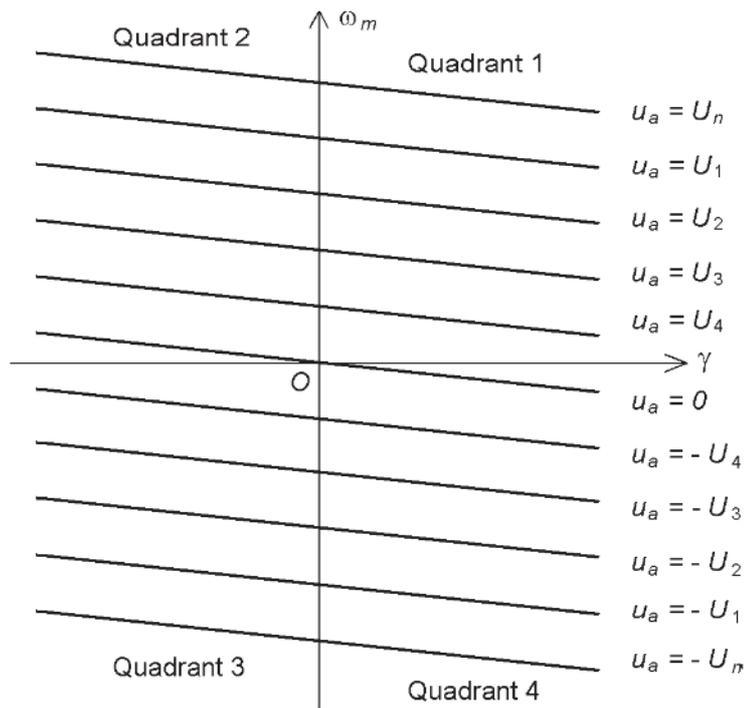


Figure 14.25 – Courbes de la vitesse de rotation en fonction du moment du couple dans les quatre quadrants, avec la tension d'induit en paramètre.

Tableau 14.1 – Définition des quatre quadrants de fonctionnement.

Quadrant	Signe de la vitesse	Signe du moment du couple	Type de fonctionnement
1	+	+	Marche en moteur tournant dans le sens positif
2	+	-	Marche en génératrice tournant dans le sens positif (freinage)
3	-	-	Marche en moteur tournant dans le sens négatif
4	-	+	Marche en génératrice tournant dans le sens négatif (freinage)

### ■ Fonctionnement à puissance constante

Lorsque la tension  $u_a$  appliquée à l'induit a atteint sa valeur maximale  $U_n$ , il n'est plus possible d'augmenter la vitesse par action sur la tension. Pour aller plus loin, il faut diminuer le flux inducteur  $\Phi$  en réduisant l'intensité  $i_f$  du courant d'excitation. La vitesse est inversement proportionnelle au flux puisque la tension est maintenant constante :

$$\omega_m = \frac{U_n - R_a i_a}{k \Phi}$$

Le moment  $\gamma$  du couple diminue également car il est proportionnel au flux inducteur  $\Phi$  :

$$\gamma = k \Phi i_a$$

La puissance électromagnétique est alors :

$$P = \gamma \omega$$

soit :

$$P = k \Phi i_a \frac{U_n - R_a i_a}{k \Phi}$$

Cette formule se simplifie :

$$P = U_n i_a - R_a i_a^2$$

À courant d'induit fixé, la puissance électromagnétique est constante, ce qui justifie le nom donné à ce mode de fonctionnement.

Ce type de réglage n'est intéressant que pour des charges dont le moment du couple résistant diminue avec la vitesse : bobineuses, laminoirs, machines-outils pour le déplacement rapide lorsque l'outil ne travaille pas.

### 14.5.3 Excitation série

L'excitation série est principalement utilisée en traction ferroviaire, donc avec des moteurs de forte puissance.

Pour un moteur à excitation série, l'induit et l'inducteur sont branchés en série sous la tension  $u$  (figure 14.26). Ils sont donc parcourus par le même courant  $i$  et la loi des mailles s'écrit :

$$u = e' + (R_a + R_f)i$$

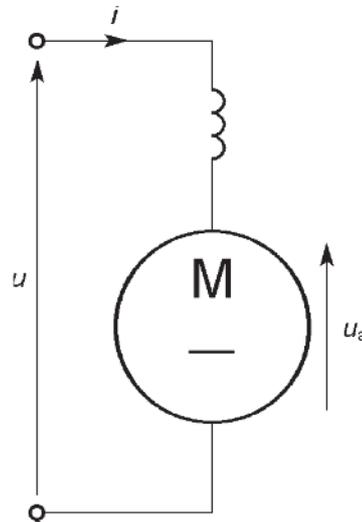


Figure 14.26 – Moteur à excitation série.

Le moment du couple électromagnétique est proportionnel à l'intensité  $i$  du courant dans l'induit et au flux inducteur  $\Phi$  :

$$\gamma = k\Phi i$$

Si le circuit magnétique n'est pas saturé, le flux inducteur  $\Phi$  est lui-même proportionnel au courant dans l'inducteur qui est également  $i$ , ce qui permet de poser :

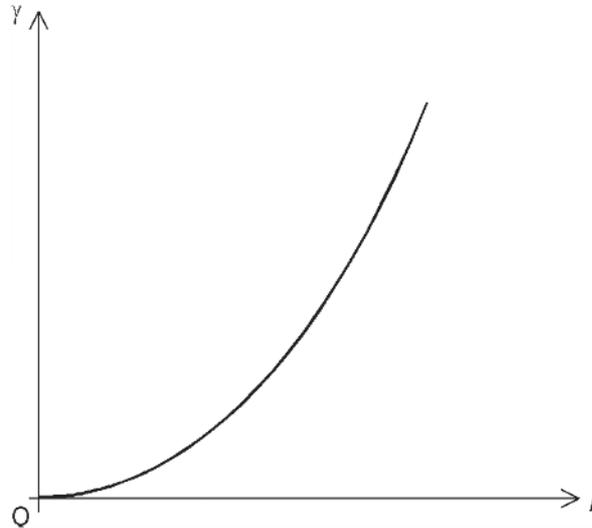
$$k\Phi = Ki$$

Cela conduit à :

$$\gamma = Ki^2$$

La caractéristique du moment du couple électromagnétique en fonction de l'intensité  $i$  du courant est donc une parabole tant que le circuit magnétique n'est pas saturé. Par contre, quand le courant augmente, le circuit magnétique se sature progressive-

ment et le moment du couple croit alors moins vite que  $Ki^2$  pour tendre vers une variation linéaire si la saturation est importante (*figure 14.27*).



**Figure 14.27** – Courbe du moment du couple électromagnétique en fonction de l'intensité du courant.

La vitesse de rotation  $\omega_m$  peut être obtenue en associant la loi des mailles et l'expression de la force contre-électromotrice :

$$u = k\Phi \omega_m + (R_a + R_f)i$$

ce qui conduit à :

$$\omega_m = \frac{u - (R_a + R_f)i}{k\Phi}$$

Si le circuit magnétique n'est pas saturé, le flux inducteur  $\Phi$  est proportionnel au courant dans l'inducteur qui est également  $i$ . En introduisant la constante  $K$  déjà définie pour le couple, nous obtenons :

$$\omega_m = \frac{u - (R_a + R_f)i}{Ki}$$

À tension  $u$  constante, la caractéristique de la vitesse de rotation en fonction de l'intensité  $i$  du courant est donc une hyperbole tant que le circuit magnétique n'est pas saturé. Avec des courants plus importants, la vitesse diminue moins vite à cause de la saturation (*figure 14.28*).

Pour obtenir l'équation de la caractéristique mécanique dans la zone non saturée, il faut éliminer  $i$  entre les formules du moment du couple et de la vitesse de rotation.

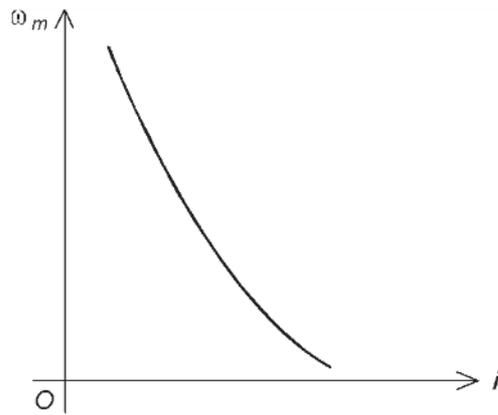


Figure 14.28 – Courbe de la vitesse de rotation en fonction de l'intensité du courant.

Pour cela, commençons par exprimer  $i$  dans cette dernière relation :

$$K i \omega_m = u - (R_a + R_f) i$$

$$i = \frac{u}{R_a + R_f + K \omega_m}$$

Portons ensuite le résultat dans la formule du moment du couple :

$$\gamma = K \frac{u^2}{(R_a + R_f + K \omega_m)^2}$$

Cette équation permet de tracer la partie de la caractéristique mécanique dans la zone non saturée. Le reste de la courbe peut être tracé point par point à partir des caractéristiques précédentes (figure 14.29). Le moment du couple étant proportionnel à  $u^2$ , il ne dépend pas de la polarité de la tension  $u$ . Pour inverser le sens de rotation, il faut inverser le sens relatif des branchements de l'induit et de l'inducteur.

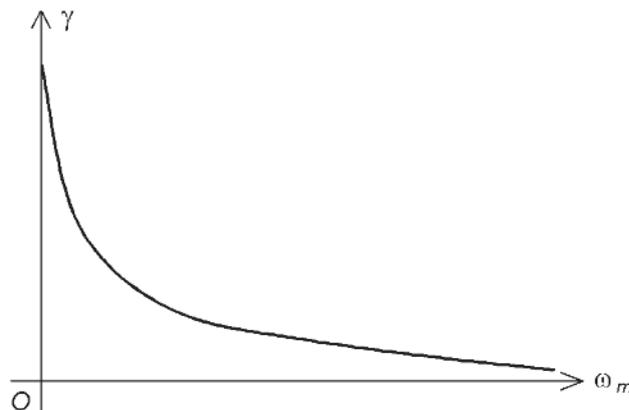


Figure 14.29 – Caractéristique mécanique d'un moteur série.

## 14.6 Alimentation par convertisseur électronique

Mis à part quelques moteurs de très petite puissance (par exemple les moteurs de jouets alimentés par pile) qui sortent du cadre de notre ouvrage, tous les moteurs à courant continu sont alimentés par un convertisseur électronique. Deux catégories de montages sont rencontrées : le hacheur et le redresseur commandé.

### 14.6.1 Hacheur

Le hacheur est rencontré dans tous les domaines de puissance, des petits actionneurs de la robotique jusqu'aux moteurs de traction ferroviaire. La technologie change suivant la puissance à commander : montages à transistors MOS ou à IGBT pour les puissances faibles ou moyennes, montages à thyristors ou à GTO pour les puissances élevées. La présence ou non d'une bobine de lissage en série avec le moteur dépend de l'ordre de grandeur de la puissance du moteur : les interrupteurs utilisés pour les moteurs de puissance modeste sont assez rapides pour que la fréquence des commutations soit suffisante pour se passer de cet élément encombrant, alors que ce n'est pas le cas pour des puissances plus importantes. La tension présentée à l'entrée du hacheur peut être obtenue à partir d'une source de tension continue (batteries, caténaire alimentée en continu) ou par redressement et filtrage d'une source de tension alternative (secteur monophasé ou triphasé, caténaire alimentée en alternatif).

Quand le moteur tourne toujours dans le même sens et que la puissance est toujours transmise de la source au moteur (fonctionnement dans un quadrant), il suffit d'un simple hacheur série (*figure 14.30*).

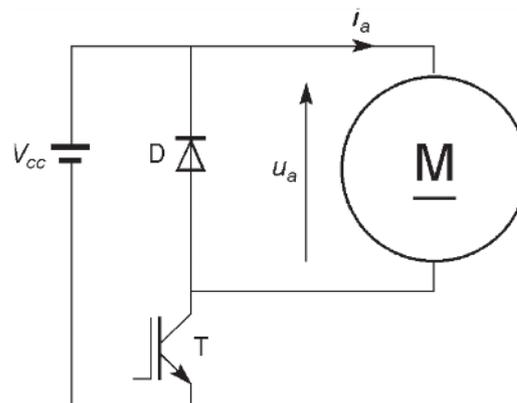


Figure 14.30 – Hacheur série.

En traction électrique, l'emploi du moteur à courant continu à excitation série a longtemps été la solution privilégiée en France. Même si ce procédé n'est plus retenu dans les réalisations actuelles, de nombreuses locomotives sont toujours équipées de cette façon. L'alimentation est fournie par un hacheur série à GTO à partir de la caténaire à courant continu ou à partir de la caténaire à courant alternatif après redressement et filtrage.

Quand la machine fonctionne à certains moments en génératrice (fonctionnement dans deux quadrants), il faut utiliser un hacheur réversible en courant ou hacheur série-parallèle (figure 14.31).

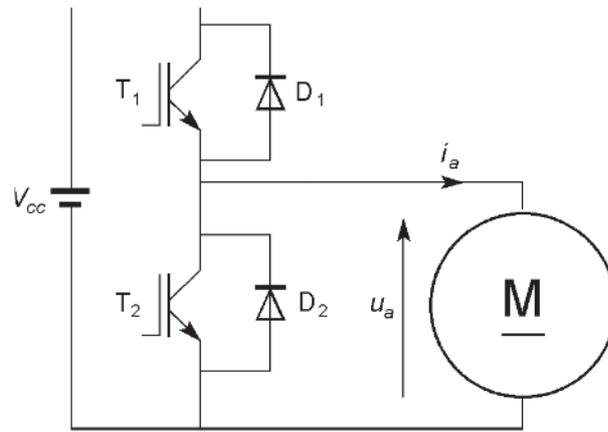


Figure 14.31 – Hacheur réversible en courant.

Si la source de tension continue placée à l'entrée n'est pas réversible, il faut prévoir un dispositif supplémentaire pour recevoir l'énergie fournie par la machine (figure 14.32).

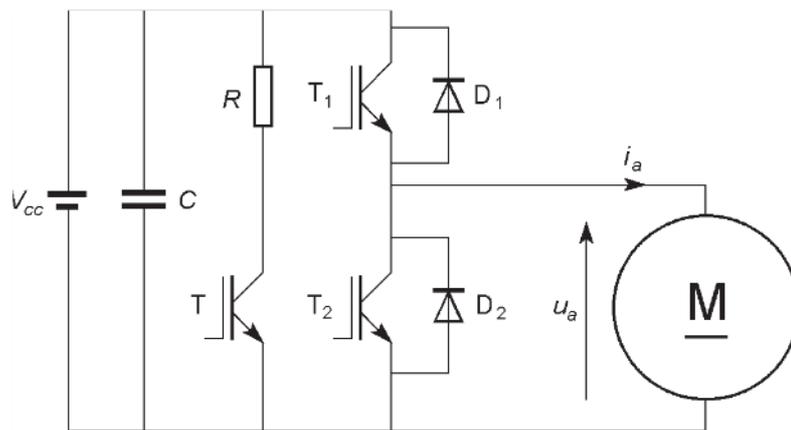


Figure 14.32 – Alimentation avec résistance de dissipation.

Certains véhicules électriques utilisent une motorisation à courant continu. Le moteur est alimenté par un hacheur réversible en courant, ce qui permet un freinage par récupération de l'énergie.

Quand il est nécessaire d'inverser le sens de rotation et de prévoir la récupération de l'énergie (fonctionnement dans quatre quadrants), on utilise le hacheur en pont (figure 14.33). Cette solution n'est rencontrée que pour des moteurs de faibles puissances.

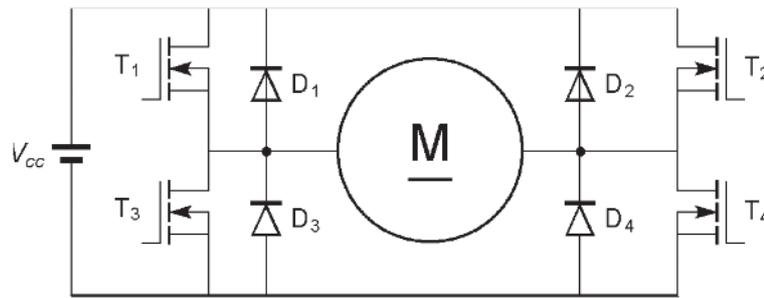


Figure 14.33 – Hacheur en pont.

### 14.6.2 Redresseur commandé

Les moteurs à excitation indépendante de puissance importante utilisés dans les processus industriels sont en général alimentés par un redresseur à thyristors. Le montage est toujours en pont et le plus souvent triphasé (redresseur parallèle double, PD3). Le redresseur parallèle simple (P3) n'est pas utilisé car il exige un transformateur et que ce dernier a un faible facteur d'utilisation.

Quand le moteur tourne toujours dans le même sens et que la puissance est toujours transmise de la source au moteur (fonctionnement dans un quadrant), on choisit un redresseur en pont mixte (figure 14.34). Ce montage a l'avantage d'utiliser moins de thyristors que le suivant et de consommer moins de puissance réactive. Il a par contre l'inconvénient de présenter des harmoniques de la tension redressée de fréquence plus faible (150 Hz au lieu de 300 Hz).

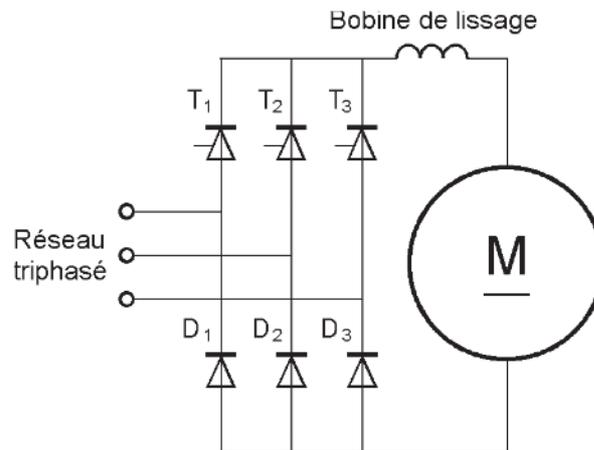
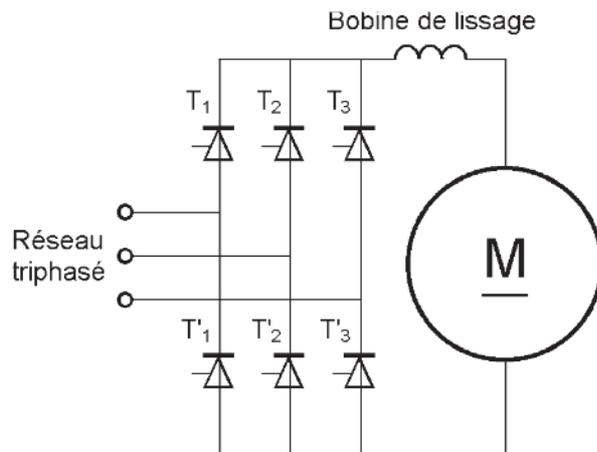


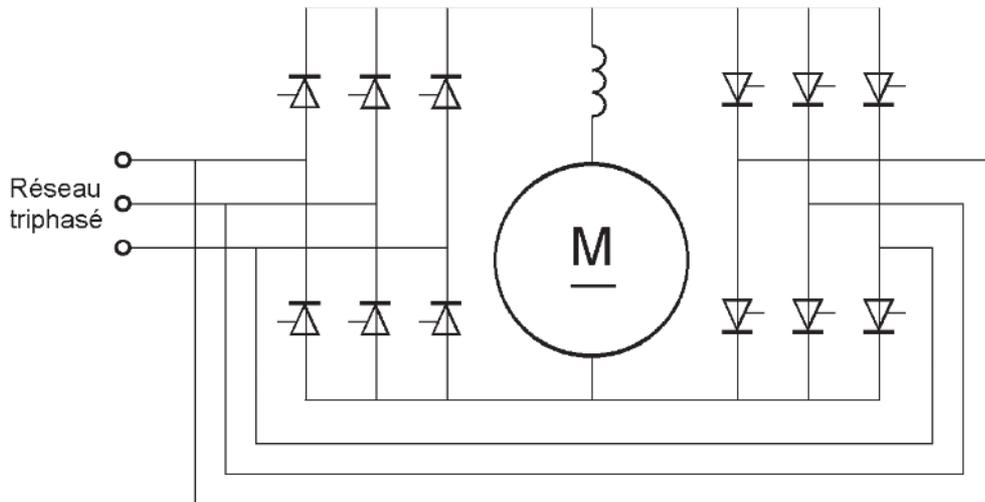
Figure 14.34 – Moteur à courant continu alimenté par un redresseur triphasé en pont mixte.

Avec un redresseur en pont n'utilisant que des thyristors, la valeur moyenne de la tension peut être positive ou négative, mais le courant est toujours du même sens (fonctionnement dans deux quadrants). La puissance va dans un cas de la source au moteur et dans l'autre cas du moteur à la source (figure 14.35).



**Figure 14.35** – Moteur à courant continu alimenté par un redresseur triphasé en pont à thyristors.

Quand il est nécessaire d'inverser le sens de rotation et de prévoir la récupération de l'énergie (fonctionnement dans quatre quadrants), on utilise deux redresseurs à thyristors dans le montage tête-bêche (*figure 14.36*).



**Figure 14.36** – Moteur à courant continu alimenté par un redresseur triphasé en montage tête-bêche.

Copyright © 2005 Dunod. Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite à l'exception des cas prévus aux termes de l'article L.122-5, 2° et 3° a) du Code de la Propriété Intellectuelle.

Nous avons regroupé ici les biographies de quelques physiciens et ingénieurs, parfois peu connus, qui ont eu un rôle dans le développement des moteurs électriques. La liste n'est évidemment pas exhaustive. Nous n'y avons pas repris les biographies des grands scientifiques dont les découvertes ont été à l'origine des machines électriques : ceux-ci ont déjà l'honneur de figurer dans de nombreux dictionnaires et encyclopédies.

## ■ Arnold (1856-1911)

Engelbert Arnold est né le 7 mars 1856 à Schlierbach dans le canton de Lucerne, en Suisse. Il fait ses études au Polytechnikum de Zurich entre 1874 et 1878. À partir de 1891, il est ingénieur en chef chez Oerlikon. Arnold est nommé en 1894 professeur d'électrotechnique à la *Technische Hochschule* de Karlsruhe où il crée l'institut d'électrotechnique. Il meurt le 16 novembre 1911 à Karlsruhe. C'est Rudolf Richter qui lui succède à l'institut technique de Karlsruhe. Ses travaux portent sur les moteurs à courant continu et à courant alternatif, et en particulier sur les machines à commutateur. Arnold a donné son nom à des formules permettant de calculer les inductances de fuites d'une machine ainsi qu'à la relation entre les courants dans une cage d'écurie.

## ■ Behn-Eschenburg (1864-1938)

Hans Behn-Eschenburg est né le 10 janvier 1864 à Oberstrass (aujourd'hui Zurich). Il fait des études de mathématiques et de physique à Zurich et Berlin entre 1886 et 1890. Behn-Eschenburg travaille dès 1892 à la fabrique de machines Oerlikon, où il devient chef électricien (1897-1911), directeur (1911-1913), directeur technique général (1913-1928) et conseiller d'administration (1919-1938). Il se distingue dans la construction des moteurs monophasés à collecteur pour la traction. Il meurt le 18 mai 1938 à Küsnacht. Ses travaux portent sur la technique du courant alternatif, notamment sur le moteur asynchrone et sur le moteur monophasé à courant alternatif avec décalage du champ de commutation qui marqua un tournant capital dans l'électrification des chemins de fer. Behn-Eschenburg a donné son nom au diagramme à une réactance de la machine synchrone.

## ■ Blondel (1863-1938)

André Blondel est né à Chaumont le 28 août 1863. Élève de l'École polytechnique qu'il intègre en 1883, il suit ensuite les cours de l'École des Ponts et Chaussées, dont il sort en 1888. En octobre 1889, il entre comme stagiaire au Service des phares et

balises. Titularisé en 1893, il y fait toute sa carrière, jusqu'à sa retraite en 1927. Il effectue des travaux de recherche dans plusieurs domaines de la physique et en particulier en électricité et en photométrie, en rapport avec les problèmes posés par les phares et par l'éclairage public. Il est également l'inventeur de l'oscillographe galvanométrique en 1893, appareil qui permet d'obtenir une représentation des courants alternatifs. Dans le domaine qui nous intéresse, ses études portent sur les machines synchrones, les moteurs asynchrones et la traction électrique. En 1913, il entre à l'Académie des sciences. En 1928, il dirige la rédaction de l'encyclopédie d'électricité industrielle publiée chez Baillière. Il meurt à Paris le 15 novembre 1938. Son nom a été donné au diagramme à deux réactances de la machine synchrone qu'il introduit en 1907 et au coefficient de dispersion des circuits couplés.

#### ■ Boucherot (1869-1943)

Paul Boucherot a été ingénieur à la Compagnie des Chemins de fer du Nord. Il a inventé la distribution électrique à courant constant, a fait des études sur le couplage des alternateurs et sur l'exploitation de l'énergie thermique des mers. En 1912, il redécouvre le moteur asynchrone à double cage que Dolivo-Dobrowolski avait inventé en 1893, sans alors attirer l'attention sur ce dispositif. Boucherot est bien connu des électrotechniciens car il a donné son nom :

- à une méthode de calcul des circuits en alternatif utilisant un bilan des puissances réactives ;
- à une formule reliant la tension et le flux dans les machines à flux forcé ;
- aux inductances de fuites totales des circuits couplés ;
- au moteur asynchrone à double cage.

#### ■ Clarke (1883-1960)

Edith Clarke est née le 10 février 1883 aux États-Unis, dans le comté d'Howard (Maryland). Après des études à l'institut de technologie du Massachusetts, où elle est la première femme diplômée en électricité, elle devient ingénieur à la compagnie *General Electric* de 1919 à 1945. Elle écrit de nombreux articles dans les revues techniques. En 1943, elle publie son principal ouvrage : *Circuit analysis of AC power systems*, Vol. IV. Symmetrical and related components, John Wiley and sons. De 1947 à 1957, elle enseigne l'électricité à l'université du Texas à Austin. Elle se retire dans le Maryland et meurt le 26 mai 1960. Edith Clarke a laissé son nom à la transformation des systèmes triphasés en systèmes diphasés présentée dans son article de 1943.

#### ■ Concordia (1908-)

Charles Concordia est né le 20 juin 1908 à Schenectady. Il commence sa carrière au laboratoire de la compagnie *General Electric* en juillet 1926. Ses travaux portent essentiellement sur le comportement dynamique des systèmes de puissance. Il a écrit environ 130 articles techniques et un livre sur les machines synchrones : *Synchronous machines. Theory and performances*, John Wiley and Sons, 1951 et a déposé six brevets. Il s'intéresse précocement aux applications des ordinateurs à l'ingénierie. Charles

Concordia a laissé son nom à la transformation des systèmes triphasés en systèmes diphasés qui conserve la puissance.

#### ■ Dalhander (1870-1935)

Robert Dahlander est un ingénieur électrotechnicien suédois dont la biographie est mal connue. Il est né le 9 juin 1870 à Göteborg et il est le fils du physicien Gustaf Robert Dahlander. Il meurt le 18 octobre 1935 à Stockholm. Il a donné son nom à un moteur asynchrone à deux vitesses.

#### ■ Dolivo-Dobrowolski (1862-1919)

Michael Ossipowitsch von Dolivo-Dobrowolski est né le 3 janvier 1862 près de Saint-Pétersbourg en Russie. Il étudie la construction des machines au Polytechnicum de Riga à partir de 1880 puis l'électrotechnique à la *Technischen Hochschule* de Darmstadt. Il y reste un an comme assistant puis entre en 1887 comme chef électricien à la *Deutschen Edison-Gesellschaft für angewandte Elektrizität*. Il réalise le premier moteur asynchrone triphasé en 1889 puis invente le moteur à double cage en 1893. Il meurt le 15 novembre 1919 à Heidelberg.

#### ■ Ferraris (1847-1897)

Galileo Ferraris est né le 31 octobre 1847 à Livorno Vercellese, dans le royaume de Sardaigne (aujourd'hui en Italie). Il fait des études d'ingénieur à Turin. Il devient en 1870 assistant au musée industriel de Turin puis chargé de cours de physique technique en 1877, et enfin professeur l'école d'ingénieurs de Turin en 1878. Ferraris est délégué du gouvernement italien au jury de l'exposition internationale d'électricité de Paris en 1881. Il est nommé directeur du laboratoire d'électrotechnique du musée industriel de Turin en 1888. On lui doit la découverte des champs magnétiques tournants, dont le principe est à la base des moteurs électriques alternatifs. Il meurt à Turin, dans le Piémont le 7 février 1897. Galileo Ferraris a donné son nom au théorème sur les champs tournants créés par les enroulements polyphasés.

#### ■ Gramme (1826-1901)

Zénobe Gramme est né à Jehay-Bodegnée, près de Liège, en Belgique, le 4 avril 1826. Il suit des cours de menuiserie à Liège avant de partir à Paris en 1856. Il travaille chez Ruhmkorff, entreprise spécialisée dans les machines magnéto-électriques. C'est vers 1867 que Zénobe Gramme a l'idée d'améliorer le moteur imaginé, en 1861, par Antonio Pacinotti. Il dépose quelques brevets entre 1863 et 1869. En 1869, il réalise un collecteur qui va permettre le développement des machines à courant continu. Au moment du siège de Paris par l'armée prussienne, en 1870-1871, il se réfugie à Arlon puis revient à Paris. En 1871, il présente une machine dynamoélectrique qui transforme l'énergie mécanique en énergie électrique. La réversibilité de l'appareil est découverte en 1873. Il finit sa carrière en France où il développe une entreprise en collaboration avec l'ingénieur français Marcel Deprez. Gramme se retire en 1904 et meurt à Bois-Colombes en 1907. Gramme a donné son nom à la dynamo qu'il a inventée et au type d'induit correspondant : l'anneau de Gramme.

**■ Jacobi (1801-1874)**

Moritz Hermann von Jacobi est né en Allemagne à Postdam le 21 septembre 1801. Il a travaillé principalement en Russie. Il étudie un moteur électromagnétique en 1834. Il se rend à Saint-Petersbourg en 1837 pour enseigner à l'Académie des sciences et y continue ses recherches sur les moteurs. Avec l'aide financière du tsar Nicolas, il construit en 1839 un bateau électrique alimenté par des batteries. Il a également travaillé sur le télégraphe et sur la galvanoplastie. Il meurt le 10 mars 1874. Jacobi a donné son nom au théorème donnant le maximum de la puissance transmise entre un générateur et une charge.

**■ Kapp (1852-1922)**

Gisbert Kapp est né le 2 septembre 1852 à Mauer près de Vienne. Il fait ses études à Zurich puis travaille comme ingénieur électricien en Angleterre à partir de 1875. En 1894, il s'installe à Berlin comme ingénieur-conseil. Il est ensuite professeur d'électrotechnique à l'université de Birmingham entre 1905 et 1919. Kapp a proposé des améliorations à la dynamo et aux méthodes de mesures électriques, il a également fait des travaux sur le transformateur. Il meurt le 10 août 1922 à Birmingham. Kapp a laissé son nom, dans le domaine des transformateurs, à une hypothèse simplificatrice et à un diagramme.

**■ Leblanc (1857-1923)**

Maurice Leblanc est né à Paris en 1857. Il a effectué de nombreux travaux dans le domaine de l'électrotechnique : il a développé une théorie complète du moteur asynchrone, a inventé les amortisseurs des machines synchrones, un transformateur de fréquence et de tension. Il a également fait des recherches en hydraulique et au sujet des machines frigorifiques. On lui doit également la découverte en 1880 du principe de la télévision avec son « Étude sur la transmission électrique des impressions lumineuses » parue dans la revue *La lumière électrique* du 1<sup>er</sup> décembre 1880. Maurice Leblanc est mort à Paris en 1923. Maurice Leblanc a donné son nom aux amortisseurs des machines synchrones et au théorème qui décompose le champ créé par un enroulement monophasé en deux champs tournants.

**■ Pacinotti (1841-1912)**

Antonio Pacinotti est né à Pise le 17 juin 1841. Il suit les cours de l'université de Pise et y passe sa maîtrise en 1861. Il est assistant de l'astronome Donati en 1862, professeur à l'Institut technique de Bologne en 1864, professeur de physique à l'Université de Cagliari en 1873. Il succède ensuite à son père en 1861, pour la chaire de physique et technologie de l'Université de Pise. Ses études ont été consacrées aux mesures électriques et aux générateurs. En particulier, il met au point son anneau qui préfigure l'induit des machines électriques. Il l'expérimente pour la première fois en 1859 et fait une communication à ce sujet en 1864. Cependant, ce dispositif ne dépasse pas le stade expérimental. Pacinotti meurt à Pise le 24 mars 1912.

### ■ Park (1902-1994)

Robert H. Park est né à Strasbourg, alors en Allemagne ; son père, le sociologue Robert Erza Park étudiait et enseignait à l'université de Heidelberg. Park grandit aux États-Unis, à Wollaston dans le Massachusetts. Il est diplômé en ingénierie électrique à l'université du Massachusetts en 1923. Il réalise ensuite un travail post-universitaire à l'Institut royal de technologie de Stockholm, en Suède. Il travaille dans plusieurs sociétés, dont la *General Electric*, puis la *R. H. Park Company*. À la fin de sa vie, il est consultant privé. Robert H. Park publie en 1929 son principal article : *Two reactions theory of synchronous machines*, Trans. AIEE vol. 48, juillet 1929, pp. 716-727. Park a laissé son nom à la transformation qui est à la base des commandes actuelles des moteurs alternatifs.

### ■ Potier (1840-1905)

Alfred Potier est né le 11 mai 1840. Il fait ses études à l'École polytechnique dans la promotion 1857 et il entre dans le corps des Mines. Il devient répétiteur de physique à l'École polytechnique en 1867, puis professeur quatorze ans plus tard. Ses travaux portent sur différents domaines de la physique, en particulier l'optique et la thermodynamique. À partir de 1881, il est membre de diverses commissions s'occupant des applications de l'électricité. Il fait quelques travaux sur les machines à courant continu et à courant alternatif. Potier est élu membre de l'Académie des sciences le 23 novembre 1891. Il meurt le 8 mai 1905. Potier a donné son nom à un diagramme de la machine synchrone.

### ■ Siemens (1816-1892)

Werner von Siemens est né le 13 décembre 1816 à Lenthe en Prusse. Siemens est certes un grand inventeur, mais aussi un homme d'affaires entreprenant. La famille Siemens ouvre à Berlin en 1847 un petit atelier télégraphique, appelé « Telegraphen-Bau-Anstalt von Siemens & Halske ». C'est Johann Georg Siemens qui a fourni le capital, Werner von Siemens, son cousin, qui a eu l'idée et Johann Georg Halske qui est leur associé. La société se développe pendant tout le XIX<sup>e</sup> siècle pour devenir une importante multinationale. En 1872, Siemens prend un brevet pour un rotor en tambour. Celui-ci va remplacer les induits à anneau dès le début du XX<sup>e</sup> siècle. Siemens meurt le 6 décembre 1892 à Charlottenburg en Allemagne. Werner von Siemens a donné son nom à l'unité de conductance dans le système international.

### ■ Steinmetz (1865-1923)

Karl August Rudolf Steinmetz est né le 9 avril 1865 à Breslau en Allemagne (aujourd'hui Wroclaw, Pologne). Il fait ses études à l'université de cette ville à partir de 1883 avant d'émigrer aux États-Unis en 1889 pour éviter l'arrestation comme membre d'un groupe d'étudiants socialistes. Dans ce pays, il se fait appeler Charles Proteus Steinmetz. Il entre comme dessinateur chez *Eickemeyer et Osterheld* et a bientôt son propre laboratoire. Il s'intéresse aux pertes dans les machines électriques et établit expérimentalement une loi permettant de calculer les pertes par hystérésis qu'il publie en 1892. Cette même année, l'entreprise *General Electric* nouvellement créée rachète les installations d'*Eickemeyer et Osterheld* et Steinmetz y débute une

carrière qui devait durer 31 ans. Il expose ensuite dans plusieurs publications une nouvelle méthode mathématique d'étude des circuits en alternatif et fait des recherches concernant l'éclairage. Durant sa carrière, il a déposé plus de 200 brevets. Steinmetz fut également professeur à l'université de Schenectady (ville de l'état de New York où se trouve le siège de la compagnie *General Electric*) entre 1902 et sa mort, le 26 octobre 1923 à Schenectady. Steinmetz a donné son nom à une formule permettant de chiffrer les pertes par hystérésis.

#### ■ Tesla (1856-1943)

Nikola Tesla est né le 9 juillet 1856 à Smiljan en Croatie. Il est le fils d'un prêtre orthodoxe d'origine serbe. Surdoué, il est capable de faire de tête des opérations compliquées. Il suit des études de physique à la *Realschule* de Karlstadt puis à l'École polytechnique de Graz et enfin à l'université de Prague. En 1882, Tesla travaille en France pour la *Continental Edison Company*. Cette même année, il propose l'utilisation du polyphasé pour entraîner une armature tournante et lors d'un séjour à Strasbourg en 1883, il réalise le premier moteur à induction. Tesla émigre aux États-Unis en 1884. Il travaille quelque temps chez Edison, mais les deux hommes ont d'importantes dissensions à propos de l'utilisation du courant continu ou du courant alternatif. George Westinghouse achète le brevet de Tesla concernant les courants polyphasés en mars 1885. C'est l'origine de la « guerre des courants » entre Thomas Edison, partisan du continu et George Westinghouse, partisan de l'alternatif. Tesla fonde ensuite son propre laboratoire. Il invente en 1891 la bobine de Tesla utilisée en radio. Nikola Tesla meurt le 7 janvier 1943 à New York. Nikola Tesla a donné son nom à l'unité de champ magnétique dans le système international.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- BARRET P., *Régimes transitoires des machines tournantes électriques*, Paris, Eyrolles, 1982.
- BONAL J., SÉGUIER G., *Entraînements électriques à vitesse variable* (3 volumes), Paris, Technique et Documentation, 1997, 1999, 2000.
- BONAL J., *Utilisation industrielle des moteurs à courant alternatif*, Paris, Technique et Documentation, 2001.
- BORNAND M., *Électrotechnique-Réseau triphasé-Machines à courant alternatif*, Paris, Vuibert, 1984.
- BOUCHARD R.-P., OLIVIER G., *Électrotechnique*, Montréal, Éditions de l'école technique de Montréal, 1996.
- CAHEN F., *Électrotechnique, tome 3, Machines à courant continu – Transformateurs*, Paris, Gauthier Villars, 1964.
- CAHEN F., *Électrotechnique, tome 4, Machines tournantes à courant alternatif*, Paris, Gauthier Villars, 1964.
- CARON J.-P., HAUTIER J.-P., *Modélisation et commande de la machine asynchrone*, Paris, Technip, 1995.
- CHATELAIN J., *Machines électriques, Traité d'électricité, volume X*, Presses polytechniques romandes, 1989.
- CHAUPRADE R., *Commande électronique des moteurs à courant continu*, Paris, Eyrolles, 1975.
- CHAUPRADE R., MILSANT F., *Électronique de puissance – Commande des moteurs à courant alternatif*, Paris, Eyrolles, 1990.
- DALMASSO J.-L., *Cours d'électrotechnique, 1. Machines tournantes à courants alternatifs*, Paris, Euphorion et Belin, 1979.
- FOUILLÉ A., *Électrotechnique à l'usage des ingénieurs, tome 2, Machines électriques à courants alternatifs*, 10<sup>e</sup> édition, Paris, Dunod, 1980.
- FOUILLÉ A., *Électrotechnique à l'usage des ingénieurs, tome 3, Machines continues, électronique de puissance*, 10<sup>e</sup> édition, Paris, Dunod, 1980.
- FRIÉDÉRICH R., *Initiation à l'électricité et à l'électrotechnique*, Paris, Éditions Fréquences.
- GENON A., LEGROS W., *Machines électriques*, Hermes Science Publications, 2000.

- GRELLET G., CLERC G., *Actionneurs électriques, principes, modèles, commande*, Paris, Eyrolles, 1996.
- GUILBERT A., *Machines synchrones*, Paris, Dunod, 1965.
- GUILBERT A., *Théorie, fonctionnement et calcul des machines électriques, tome 1, Circuit magnétique – Machines à courant continu*, Paris, Dunod, 1951.
- JOOS G., GOODMAN E.D., *Entraînements à courant continu*, Québec, Presses de l'université du Québec, 1987.
- LACROUX G., *Les actionneurs électriques pour la robotique et les asservissements*, 2<sup>e</sup> édition, Paris, Technique et Documentation, 1994.
- LACROUX G., *Les aimants permanents*, Paris, Technique et Documentation, 1989.
- LESENNE J., NOTELET F., SÉGUIER G., *Introduction à l'électrotechnique approfondie*, Paris, Technique et Documentation, 1981.
- LOUTZKY S., *Calcul pratique des alternateurs et des moteurs asynchrones*, Paris, Eyrolles, 1969.
- LOUTZKY S., *Calcul pratique des machines électriques à courant continu*, Paris, Eyrolles, 1963.
- MILLER T.J.E., *Switched reluctance motors and their control*, Oxford Science Publications, New York, 1993.
- MILSANT F., *Cours d'électrotechnique, tome 2, Machines à courant continu*, Paris, Eyrolles, 1981.
- MUTREL L., *Le moteur asynchrone*, Paris, Ellipses, 1999.
- PICHOIR J., *Cours d'électrotechnique, tome 3, Machines électriques (3 fascicules)*, Paris, Masson, 1965.
- PINARD M., *Commande électronique des moteurs électriques*, Paris, Dunod, 2004.
- POLOUJADOFF M., *Conversions électromécaniques*, Paris, Dunod, 1969.
- SAINT-JEAN B., *Électrotechnique et machines électriques*, Paris, Eyrolles, 1977.
- SÉGUIER G., NOTELET F., *Électrotechnique industrielle*, 2<sup>e</sup> édition, Paris, Technique et Documentation, 1994.
- STURTZER G., SMIGIEL E., *Modélisation et commande des moteurs triphasés*, Paris, Ellipses, 2000.
- VAS P., *Vector control of AC machines*, Oxford, Oxford Science Publications, 1990.

## A

accrochage 316  
 amortisseur 267  
 angle électrique 56, 73  
 autopilotage 322, 329

## B

balais 346

## C

caractéristique  
   magnétique 350  
   mécanique 10  
 cascade hyposynchrone 249  
 changement de repère 159  
 circuit magnétique 7  
 coefficient  
   de dispersion de Blondel 179, 196  
   de température 106  
 coénergie 89  
 collecteur 346, 351  
 commande  
   scalaire 255, 322  
   vectorielle 260, 325  
 composantes symétriques 81  
 constante de temps  
   rotorique 179  
   subtransitoire 314  
   thermique 128  
   transitoire 314  
 couplage Dahlander 241  
 couple 301  
   de démarrage 12, 209  
   électromagnétique 91, 204, 358  
   moteur 8  
   résistant 8  
   utile 9

courants de Foucault 109  
 cycloconvertisseur 251, 318

## D

démarrage 12, 227, 245, 311  
   étoile-triangle 235  
 dent 15  
 diagramme  
   de Behn-Eschenburg 298  
   de Blondel 299  
 diagramme spatial 82

## E

échauffement 125  
 effet de peau 25  
 encoche 14, 32, 289  
 énergie  
   cinétique 13  
   magnétique 89  
 enroulement 43, 354  
   concentré 43  
   diphasé 74  
   distribué 43  
   en bobines concentriques 48  
   en sections 48  
   par pôle 48  
   par pôles conséquents 48  
   triphasé 76  
 entrefer 6  
   constant 94  
   variable 100  
 équations de Maxwell 19  
 excitation  
   composée 347  
   indépendante 364  
   parallèle 347  
   séparée 347  
   série 347, 367

## F

facteur  
d'inclinaison 67  
d'ouverture d'encoche 67  
de bobinage 69  
de distribution 59  
de marche 134  
de raccourcissement 65  
faisceau 44  
fonction de Bessel 29  
freinage 13, 239, 246  
à contre-courant 240, 247  
hypersynchrone 240, 246  
par injection de courant continu 241

## G

glissement 165  
gradateur 238  
grandeur complexe spatiale 153

## H

hacheur 248, 370  
harmoniques 213  
hystérésis 109

## I

inducteur 264, 345  
induit 264, 345

## L

ligne de champ 15  
loi  $\frac{U}{f}$  constante 258  
loi de Laplace 14

## M

matrice 92, 167, 272  
modèle  
aux circuits couplés 193  
avec inductances de fuites  
partielles 194  
totalisées au rotor 196  
totalisées au stator 198  
moment d'inertie 9  
montage en demi-pont 338  
moteur  
à cage d'écureuil 163, 179, 219  
à courant continu 345

à double cage 228  
à encoches profondes 232  
à induction 161  
à réluctance variable 327  
asynchrone 161  
synchrone 263  
à aimants 265  
à inducteur bobiné 266  
à réluctance variable 267

## N

nombre d'encoches par pôle et par phase 46

## O

ondulation du couple 289  
onduleur  
de courant 254, 321  
de tension 252, 319

## P

pas  
dentaire 46  
polaire 46  
raccourci 62  
pertes  
ferromagnétiques 108, 200  
mécaniques 124  
par effet Joule 105  
par frottement 124  
par ventilation 124  
phases chevauchantes 64  
phénomène de Görge 316  
point de fonctionnement 11  
principe fondamental de la dynamique  
8  
profil d'inductance 334  
profondeur de pénétration 28, 39  
puissance 362  
active 202, 300  
mécanique interne 203  
réactive 204, 307  
transmise 203

## R

réaction d'induit 357  
redresseur commandé 372